

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/268976347>

# L'équation de Burgers déterministe et statistique (The deterministic and statistical Burgers equation)

Article in *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée* · January 1983

CITATIONS

68

READS

213

2 authors, including:



**Uriel Frisch**

Observatoire de la Côte d'Azur

272 PUBLICATIONS 19,417 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Lattice gases [View project](#)



Cauchy-Lagrangian [View project](#)

## L'équation de Burgers déterministe et statistique

*The deterministic and statistical Burgers equation*

par

**J.-D. FOURNIER et U. FRISCH**

**RÉSUMÉ.** — En s'appuyant sur une nouvelle représentation, « Fourier-Lagrangienne », de la solution de l'équation de Burgers dans la limite de viscosité nulle, on analyse son comportement ultraviolet (UV), c'est-à-dire aux nombres d'onde  $k$  tendant vers l'infini, dans le cas déterministe et le cas aléatoire.

Dans le cas déterministe en phase régulière (avant la formation de chocs), le comportement ultraviolet est déterminé par des singularités situées dans le domaine complexe. L'apparition de chocs est précédée d'une singularité plus faible, le préchoc, où la vitesse a un point d'inflexion à tangente verticale. Les singularités complexes, les préchocs et les chocs se traduisent dans les amplitudes de Fourier par des comportements ultraviolets respectivement : à décroissance rapide; en loi de puissance (génériquement en  $k^{-4/3}$ ); et en  $k^{-1}$ .

Dans le cas aléatoire, lorsque les instants de formation des préchocs ont une borne inférieure  $T_* > 0$ , on peut obtenir à  $T_*$  un spectre d'énergie en loi de puissance, plus raide que le spectre en  $k^{-2}$  caractéristique de la phase dissipative avec chocs. Ce dernier s'établit après  $T_*$ ; rejeté d'abord dans l'extrême ultraviolet, il contamine progressivement des nombres d'onde plus faibles. Avec des conditions initiales gaussiennes,  $T_* = 0$ ; le spectre en  $k^{-2}$  s'établit immédiatement, mais avec un facteur d'amplitude présentant une singularité essentielle à  $t=0$ ; les manipulations formelles de l'équation de Burgers statistique, avec resommation de séries de perturbation à tous les ordres, conduisent, par le fait de telles singularités essentielles, à un résultat erroné (spectre en  $k^{-3}$ ).

D'autres aspects du problème de Burgers, exploitant la solution de Hopf-Cole, sont passés en revue; en particulier, on présente une variante de la méthode de Kida (1979, *J. Fluid Mech.*, vol. 93, p. 337-377) pour le calcul de la loi de décroissance de l'énergie aux temps longs.

**ABSTRACT.** — The ultraviolet (UV) behavior (infinite wavenumber  $k$  limit) of the solution of Burgers' equation in the inviscid limit is studied both for deterministic and random initial conditions; the analysis is mostly based on a new "Fourier-Lagrangian" representation of this solution.

In the deterministic case, during the regular phase (before formation of shocks), the ultraviolet behavior is governed by singularities located in the complex domain. Just before a shock, a weaker singularity (preshock) arises where the velocity has a vertical inflexion point. Complex singularities, preshocks and shocks respectively prescribe the ultraviolet behavior of the amplitude of the Fourier modes, namely: fast decrease; power law (generically  $k^{-4/3}$ ); and  $k^{-1}$ .

In the random case, if (almost) all the realizations remain smooth up to  $T_* > 0$ , a power law spectrum steeper than  $k^{-2}$  may arise at  $T_*$ . Afterwards, the  $k^{-2}$  spectrum, associated to the shocks, appears in the extreme ultraviolet; it gradually overruns smaller wavenumbers. For gaussian initial conditions,  $T_* = 0$ ; a  $k^{-2}$  spectrum appears immediately, with a coefficient presenting an essential singularity at  $t=0$ . In the presence of essential singularities, formal expansions may yield wrong results for the statistical Burgers' equation (e. g. a  $k^{-3}$  spectrum).

Other aspects of the Burgers' problem, using the Hopf-Cole solution, are reviewed. In particular, we present a variant of Kida's method (1979, *J. Fluid Mech.*, Vol. 93, pp. 337-377) for working out the law of decay of energy for large time.

C.N.R.S., Observatoire de Nice, B.P. n° 139, 06003 Nice Cedex.

## 1. Introduction

Nous nous intéressons dans cet article à l'équation non linéaire de diffusion introduite par Burgers [1] :

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

où la quantité réelle inconnue  $u(t, x)$ , la vitesse, est fonction d'une variable de temps  $t$  et d'une variable d'espace  $x$ ; on prescrit en général la valeur initiale  $u_0(x) = u(0, x)$ , et des conditions aux limites (par exemple périodiques); le coefficient  $\nu$  (viscosité) appartient à  $\mathbb{R}_+$ .

Forme asymptotique de nombreux systèmes à la fois non linéaires et dissipatifs (voir [2]), l'équation de Burgers (1) a surtout retenu l'attention comme modèle pour la théorie statistique de la turbulence ([1], [3] à [6]) <sup>(1)</sup>; on s'intéresse alors à l'équation (1) avec des forces extérieures ou des conditions initiales aléatoires. Seul ce dernier cas sera considéré ici.

Comme l'équation de Navier-Stokes, l'équation de Burgers présente une non-linéarité quadratique, dont l'importance peut être mesurée par un nombre de Reynolds  $R \propto \nu^{-1}$ . En tant que modèle de certains aspects de la turbulence développée, l'équation de Burgers doit être étudiée à grand nombre de Reynolds, ou même dans la limite  $\nu \downarrow 0$ . On démontre facilement l'existence de cette limite (voir [10]), qui présente en général des chocs au bout d'un temps fini (§ 2 et 4.1).

En raison de la similitude de structure, la plupart des méthodes statistiques applicables à l'équation de Navier-Stokes le sont également à l'équation de Burgers. Dans les cas où l'on dispose de solutions exactes pour l'équation de Burgers, on a ainsi la possibilité de tester ces méthodes : techniques de fermetures; de renormalisation; de resommation de séries infinies, moyennées terme à terme; etc., ... ([11] à [15]).

On sait que l'équation de Burgers (1) peut être résolue par quadrature par la méthode de Hopf et Cole ([16], [17]). La structure de cette solution ne se prête qu'assez difficilement à la prise de moyennes; elle est toutefois employée au paragraphe 4, qui contient une présentation un peu remaniée du très remarquable travail de S. Kida [18] sur la loi de décroissance de l'énergie.

Dans la majeure partie de ce travail, nous avons utilisé une nouvelle représentation, dite Fourier-Lagrangienne (F. L.) de la solution de l'équation de Burgers dans la limite  $\nu \downarrow 0$ . Dans la représentation F. L., la transformée de Fourier spatiale de la solution eulérienne, exprimée à l'aide de coordonnées lagrangiennes, s'écrit explicitement dans la phase régulière, avant les chocs (§ 2.1); elle peut être généralisée au régime dissipatif avec chocs (§ 2.2). La solution explicite fait intervenir les conditions initiales sous forme d'une exponentielle se prêtant bien à la prise (formelle) de moyennes. Elle se prête bien également à des développements en série de Taylor en temps; ces développements, utilisés

<sup>(1)</sup> Récemment décédé, J. M. Burgers a été un pionnier dans plusieurs domaines (voir une notice dans [7] et quelques pages de souvenirs dans [8]). En théorie statistique de la turbulence, signalons qu'il a également introduit l'étude de ce qu'on appelle maintenant les équilibres absolus [9].

sans précaution (c'est-à-dire sans tenir compte des chocs), peuvent conduire à des expressions convergentes mais qui ne sont pas solution de l'équation de Burgers, et cela aussi bien dans le cas déterministe (§ 2.1) que dans le cas aléatoire (§ 3.2 et 3.4). Des calculs corrects en phase dissipative peuvent encore être effectués, mais seulement dans une perspective asymptotique, pour des temps voisins de l'instant d'accumulation des singularités (§ 3.3 et 3.4; certains de ces résultats étaient annoncés sans démonstration dans [19]). Dans la conclusion (§ 5), on fait le bilan des résultats obtenus, et on en souligne les implications pour la mécanique statistique des systèmes non linéaires; celle-ci ne peut être effectuée avec succès que si l'on prend en compte correctement le rôle des structures organisées : tels les chocs et leurs précurseurs (réels ou complexes) dans l'équation de Burgers.

## 2. La représentation Fourier-Lagrangienne de la solution de l'équation de Burgers dans le cas déterministe

Ce chapitre est consacré à l'équation de Burgers (1) déterministe, avec une condition initiale  $u_0(x)$  régulière (i. e. différentiable autant que nécessaire) et s'annulant à l'infini. On s'intéresse en particulier à la génération de petites échelles dans la limite de viscosité nulle. Nous introduisons des représentations nouvelles de la solution dans la limite de viscosité nulle — d'une part en phase régulière avant l'instant  $t_*$  de la première singularité (§ 2.1), d'autre part en phase dissipative après  $t_*$  (§ 2.2), — et nous étudions sa structure analytique; ceci nous permet d'obtenir et d'interpréter son comportement ultraviolet (limite de nombre d'onde infini).

### 2.1. CAS INVISCIDE EN PHASE RÉGULIÈRE

#### (a) La singularité de préchoc.

A viscosité nulle, l'équation (1) exprime la nullité de la dérivée temporelle « en suivant le mouvement » du champ de vitesse; chaque particule du fluide conserve sa vitesse initiale, ce qui s'écrit :

$$(2a) \quad u(t, X(t, a)) = u_0(a);$$

$$(2b) \quad X(t, a) = a + tu_0(a)$$

est la coordonnée (eulérienne) à l'instant  $t$  de la particule qui à l'instant initial était en  $a$  (coordonnée lagrangienne). La solution implicite (2), dite lagrangienne, de l'équation de Burgers inviscide est définie, unique, et aussi régulière que  $u_0(a)$ , tant que la transformation lagrangienne-eulérienne est inversible, donc tant que :

$$(3) \quad J(t, a) = \frac{\partial X(t, a)}{\partial a} = 1 + tu'_0(a),$$

est positif. Il en est ainsi jusqu'à l'instant  $t_*$  défini par :

$$(4) \quad t_* = \frac{1}{-\text{Inf}_a[u'_0(a)]};$$

( $u'_0(a)$  est le gradient initial, par hypothèse borné et non constamment positif). A l'instant  $t_*$ , le phénomène de rattrapage de particules lentes par leurs voisines plus rapides produit une singularité. Soit en effet  $a_*$  un point où le gradient initial atteint sa borne inférieure, et  $X_*(t)$  sa coordonnée eulérienne à l'instant  $t$ ; dans la limite  $t \uparrow t_*$ , le gradient au point  $X_*(t)$  :

$$(5) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_*} = \left. \frac{\partial u}{\partial a} \right|_{a_*} \left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x_*} = u'_0(a_*) \frac{1}{1 + tu'_0(a_*)},$$

tend vers l'infini.

Pour faire l'analyse locale de cette singularité, qualifiée dans la suite de préchoc, il est commode de supposer que le minimum (négatif) ( $-M$ ) du gradient initial est atteint à l'origine ( $a_* = 0$ ), et que la vitesse s'y annule ( $u_0(a_*) = 0$ ); ceci est toujours possible par translation du repère et transformation de Galilée. En posant  $b = u''_0(0)$ , le développement de Taylor de la vitesse initiale autour de l'origine s'écrit alors :

$$(6) \quad u_0(a) = -M a + \frac{b}{3!} a^3 + O(a^4),$$

avec génériquement  $b > 0$ . Le développement de la position eulérienne  $X(t, a)$  s'écrit alors :

$$(7) \quad X(t, a) = (1 - Mt) a + \frac{b}{3!} t a^3 + O(a^4);$$

dans la limite  $t \uparrow t_* = 1/M$ , le comportement au voisinage de l'origine de la position eulérienne en fonction de la coordonnée lagrangienne, d'abord linéaire, est remplacé par un méplat cubique (fig. 1). Inversant localement la transformation lagrangienne-eulérienne, il vient au plus bas ordre :

$$(8) \quad t < t_* \quad a(t, X) = \frac{1}{1 - Mt} X + O(X^3),$$

$$(9) \quad t = t_* \quad a(t_*, X) = \left( \frac{6M}{b} \right)^{1/3} X^{1/3} + O(X^{2/3});$$

on en déduit une représentation explicite locale du champ de vitesse :

$$(10) \quad t < t_* \quad u(t, X) = -\frac{1}{t_* - t} X + O(X^3),$$

$$(11) \quad t = t_* \quad u(t_*, X) = -M \left( \frac{6M}{b} \right)^{1/3} X^{1/3} + O(X^{2/3}).$$

Avant  $t_*$  le champ de vitesse est localement linéairement décroissant (10); à l'instant  $t_*$  il est singulier, avec un point d'inflexion à tangente verticale (gradient infini; fig. 2); c'est le préchoc, génériquement de forme racine cubique (11). Il est intéressant de caractériser

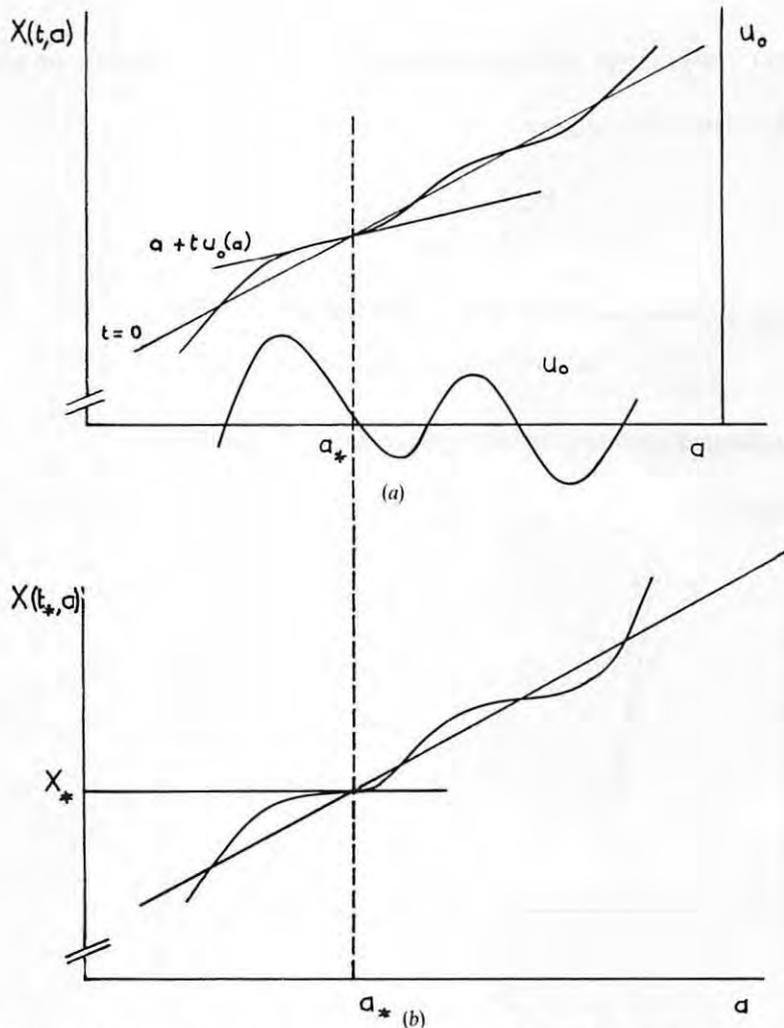


Fig. 1. — Position eulérienne  $X(t, a)$  à un instant  $t \leq t_*$  de la particule initialement en  $a$  (coordonnée lagrangienne);  $u_0$  est la vitesse initiale. Pendant la phase régulière ( $t < t_*$ ) (fig. 1 a), chaque particule conserve sa vitesse initiale; la fonction monotone  $X(t, a) = a + t u_0(a)$  permet de construire graphiquement la solution implicite (2) de l'équation de Burgers inviscide  $u[t, X(t, a)] = u_0(a)$ . Au voisinage (lagrangien) de  $a_*$ , où le gradient initial est minimum,  $X(t, a)$  est linéaire; dans la limite  $t \uparrow t_*$ , la pente tend vers zéro, et il apparaît un méplat cubique (fig. 1 b), correspondant au préchoc (fig. 2) (voir § 2.1 a où  $a_* = X_* = 0$ ).

Fig. 1. — Eulerian position  $X(t, a)$  at a given time  $t \leq t_*$  of a particle with initial position  $a$  (Lagrangian coordinate);  $u_0$  is the initial velocity. During the regular phase ( $t < t_*$ ) (Fig. 1 a) each particle keeps its initial velocity; the function  $X(t, a) = a + t u_0(a)$  is monotonic, which permits a simple geometric construction of the implicit solution (2) of Burgers' equation  $u[t, X(t, a)] = u_0(a)$ . In a (Lagrangian) neighbourhood of the point  $a_*$  where the initial gradient is minimum, the function  $X(t, a)$  is linear; when  $t \uparrow t_*$ , the slope tends to zero; the horizontal inflection thus obtained (Fig. 1 b) corresponds to the preshock (Fig. 2) (see § 2.1 a where  $a_* = X_* = 0$ ).

cette singularité par le comportement « critique » ( $t \uparrow t_*$ ) de l'entropie :

$$(12) \quad \Omega(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right]^2 dx.$$

A l'instant  $t_*$ , elle diverge comme l'intégrale  $\int_{\varepsilon \downarrow 0}^{+\infty} |x|^{-4/3} dx$ ; avant  $t_*$  on peut l'écrire à l'aide de la solution lagrangienne :

$$(13) \quad \Omega(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{[u'_0(a)]^2}{1 + tu'_0(a)} da;$$

en notant que, au voisinage de l'origine, le gradient initial s'écrit :

$$u'_0(a) = (-1/t_*) + (b/2) a^2 + O(a^3),$$

on extrait facilement le comportement critique du terme dominant :

$$(14) \quad \Omega(t) \underset{t \uparrow t_*}{\propto} (t_* - t)^{-1/2}.$$

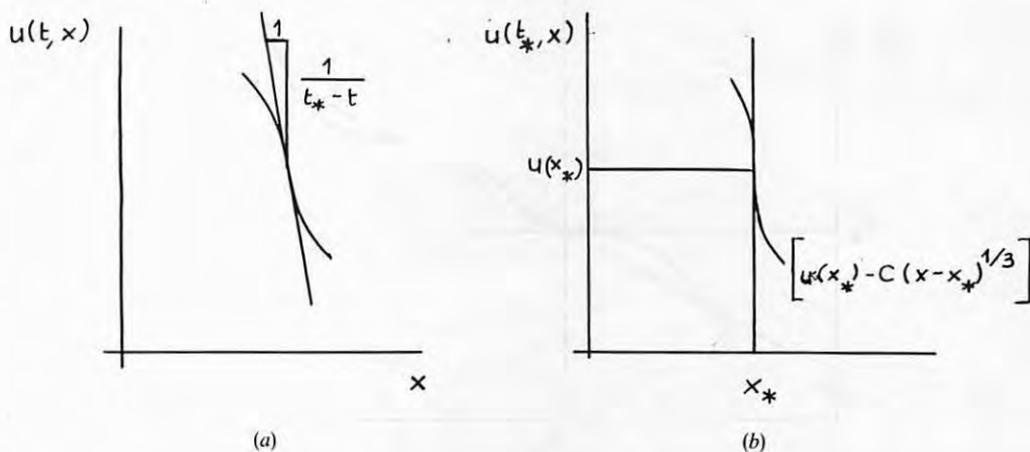


Fig. 2. — Comportement du champ de vitesse au voisinage (eulérien) du point  $x_*(t)$  où le gradient est minimum. Pendant la phase régulière ( $t < t_*$ ), le profil est linéaire (fig. 2 a); dans la limite  $t \uparrow t_*$ , la pente  $-1/(t_* - t)$  tend vers moins l'infini; à  $t_*$  il y a un point d'inflexion à tangente verticale, et le profil est localement en racine cubique (fig. 2 b) : c'est la singularité de préchoc (voir § 2.1 a).

Fig. 2. — Velocity field in an (eulerian) neighbourhood of the point  $X_*(t)$  (location of the minimum gradient). During the regular phase ( $t < t_*$ ) it behaves linearly (Fig. 2 a), with a slope  $-1/(t_* - t)$  when  $t \uparrow t_*$ ; at  $t_*$  there is a vertical inflexion with a cubic root shape (Fig. 2 b); this is the preshock singularity (see § 2.1 a).

### (b) Les représentations Fourier-Lagrangiennes.

A l'aide de la transformée de Fourier spatiale du champ de vitesse eulérien :

$$(15) \quad \hat{u}(t, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} u(t, x) dx,$$

écrite à l'aide des coordonnées lagrangiennes, nous construisons ici diverses représentations explicites, dites Fourier-Lagrangiennes (F-L), de la solution. Avant l'instant  $t_*$  de préchoc, on peut en effet effectuer, dans l'intégrale (15), le changement de variable lagrangien (2b); on obtient :

$$(16) \quad \hat{u}(t, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikX(t,a)} u_0(a) \frac{\partial X(t,a)}{\partial a} da,$$

qui est la première représentation F-L. Par intégration par parties, on obtient :

$$(17) \quad \hat{u}(t, k) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ik} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikX(t,a)} u_0'(a) da, \quad k \neq 0$$

deuxième représentation explicite F-L ([20], [19]). Introduisant le déplacement lagrangien,

$$(18) \quad \xi(t, a) = X(t, a) - a = tu_0(a),$$

on peut réécrire (17) sous la forme :

$$(19) \quad \hat{u}(t, k) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ikt} \int_{\mathbb{R}} e^{-ik[a+\xi(t,a)]} \frac{\partial \xi}{\partial a} da, \quad k \neq 0;$$

par intégration par parties, on obtient une troisième représentation F-L :

$$(20) \quad \hat{u}(t, k) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{ikt} \int_{\mathbb{R}} e^{-ika} [e^{-ik\xi(t,a)} - 1] da, \quad k \neq 0.$$

(c) Comportement de la transformée de Fourier aux grands nombres d'onde.

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement asymptotique de la solution pour  $k$  (nombre d'onde) tendant vers l'infini, au voisinage de l'instant  $t_*$  du préchoc.

A l'instant  $t_*$  lui-même, la solution présentant une singularité (préchoc) génériquement de type racine cubique (11), la transformée de Fourier a, à un facteur de phase près lié à la position du préchoc, un comportement en loi de puissance de la forme (voir fig. 6a) :

$$(21) \quad |\hat{u}(t, k)| \underset{k \rightarrow +\infty}{\propto} k^{-4/3}.$$

Pour  $t \uparrow t_*$ , l'expression F-L (17) se prête bien à une évaluation asymptotique. La méthode de la phase stationnaire usuelle ne suffit pas ici; il faut en effet retenir des termes cubiques dans le développement de la phase, ce qu'on pourrait appeler méthode de la phase inflexionnelle; quant au gradient initial, en facteur dans l'intégrant, on le remplace

par sa valeur extrême  $u'_0(0) = -M = -1/t_*$ . On ramène ainsi l'évaluation asymptotique de la transformée de Fourier du champ de vitesse à celle d'une intégrale oscillante associée à une singularité en pli, selon la terminologie de la théorie des catastrophes; cette dernière intégrale n'est autre qu'une intégrale d'Airy, de sorte que :

$$(22) \quad \hat{u}(t, k) \underset[k \rightarrow +\infty]{t \uparrow t_*} \simeq i \left( \frac{t_*^3 t b}{2} \right)^{-1/3} k^{-4/3} \text{Ai} \left[ \left( \frac{t_*^3 t b}{2} \right)^{-1/3} k^{2/3} (t_* - t) \right].$$

En ne retenant que le terme dominant de la fonction d'Airy aux grands arguments [21], il vient :

$$(23a) \quad |\hat{u}(t, k)| \underset[k \gg K_1(t)]{t \uparrow t_*} \propto (t_* - t)^{-1/4} k^{-3/2} \exp[-k/K_1(t)],$$

$$(23b) \quad K_1(t) \underset{t \uparrow t_*} \propto (t_* - t)^{-3/2}.$$

Au voisinage inférieur de  $t_*$  ( $t \uparrow t_*$ ), donc avant toute singularité, la transformée de Fourier du champ de vitesse présente donc deux régimes asymptotiques. Aux très grands nombres d'onde, il y a décroissance exponentielle, avec un préfacteur en loi de puissance  $-3/2$ , lié à la nature des singularités à position complexe (voir ci-dessous et [22]). A des nombres d'onde plus modérés, le comportement en racine cubique du voisinage de la (future) singularité réelle se fait sentir, donnant une zone en loi de puissance  $-4/3$ . Le raccordement, par une fonction d'Airy, se fait à un nombre  $K_1(t)$  qui croît comme  $(t_* - t)^{-3/2}$  quand on s'approche de l'instant  $t_*$ ; la zone en  $k^{-4/3}$  s'étend alors progressivement jusqu'à l'infini.

La disparition, à  $t_*$ , de la zone à décroissance rapide, au profit d'une loi de puissance, d'exposant différent de celui du préfacteur à  $t < t_*$ , peut s'interpréter par passage au plan complexe. Pourvu que la donnée initiale soit analytique, on peut en effet, à tout instant  $t < t_*$  prolonger analytiquement à des positions complexes la solution (2a); toutefois le champ de vitesse complexe  $U(t, z)$  est singulier aux points où la transformation complexe (2b) n'est pas inversible; en un tel point  $A_*(t)$ , d'image  $Z_*(t)$ , la dérivée  $\partial Z/\partial A$  s'annule; sauf éventuellement en des instants isolés, c'est nécessairement un zéro simple, et l'on a au voisinage de ce point :

$$(24) \quad \begin{cases} Z - Z_* \propto (A - A_*)^2, \\ \frac{\partial Z}{\partial A} \propto (A - A_*) \propto \sqrt{Z - Z_*}, \end{cases}$$

où  $\sqrt{\quad}$  désigne une détermination de la racine carrée complexe; on déduit le comportement local du gradient de vitesse :

$$(25) \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\partial U}{\partial A} \bigg/ \frac{\partial Z}{\partial A} \propto 1/\sqrt{Z - Z_*},$$

et du champ de vitesse :

$$(26) \quad U(t, Z) - U(t, Z_*(t)) \propto \sqrt{Z - Z_*(t)},$$

au voisinage du point de branchement  $Z_*(t)$ , qu'on suppose unique. Selon un théorème classique [23], cette singularité d'exposant  $1/2$  se manifeste dans le comportement asymptotique de la transformée de Fourier par un préfacteur  $k^{-3/2}$  devant une exponentielle décroissante, comme obtenu directement plus haut (23); le décrement  $(1/K_1(t))$  s'interprète alors comme la distance à l'axe réel de cette singularité. Comme expliqué dans la référence [24], cette remarque permet de donner un sens quantitatif à la notion de « plus petite échelle excitée », définie comme largeur de la bande d'analyticité du champ de vitesse; elle est à la base d'une méthode d'exploration numérique des solutions d'équations aux dérivées partielles [22]. A l'instant  $t_*$ , la singularité  $Z_*$ , par coalescence avec sa complexe conjuguée, engendre le préchoc, singularité réelle d'ordre plus élevé (11) qui donne lieu au régime en  $k^{-4/3}$ .

Cette analyse par extension complexe permet de discuter facilement la généralité des résultats obtenus ci-dessus pour le comportement asymptotique de la transformée de Fourier à  $t \lesssim t_*$ . Pour un champ initial réel analytique, sauf pathologie ( $u_0(a) = -a$  sur toute la droite réelle, par exemple), il y a, à  $t < t_*$ , au moins une singularité complexe, isolée, du champ de vitesse; sa nature est imposée par le raisonnement ci-dessus (26). Le préfacteur en  $k^{-3/2}$  de la zone à décroissance exponentielle est donc universel. A d'éventuelles périodicités et symétries près, le nombre des singularités tendant vers l'axe réel quand  $t$  approche  $t_*$  est déterminé par la forme locale du champ initial. Si celle-ci est de degré  $(2m+1)$ , plus élevé que dans la forme cubique ( $m=1$ ) utilisée ici (6), il y a plus d'une paire de singularités, et il apparaît des termes oscillants dans la zone à décroissance rapide de la transformée de Fourier. Le décrement se comporte en  $(t_* - t)^{(2m+1)/2m}$  et n'est donc pas universel. Quant à l'exposant de la zone en pure loi de puissance, qui s'établit aux nombres d'onde modérés, il dépend de la nature du préchoc qui se forme à  $t_*$  par coalescence sur l'axe réel des  $m$  paires; le champ de vitesse est alors localement en  $X^{1/(2m+1)}$ , donc non universel.

Enfin, un point qui mérite d'être souligné est que le régime dissipatif, qui présente des discontinuités (chocs) et donc des amplitudes de Fourier en  $k^{-1}$  (voir § 2.2), ne possède pas de précurseur à l'instant  $t_*$ , ou avant. Il serait donc inexact de concevoir le régime inertiel de la phase dissipative comme résultant d'une cascade s'établissant progressivement en nombre d'onde pour s'étendre jusqu'à  $k = \infty$  à l'instant  $t_*$ .

(d) Extension formelle des représentations Fourier-Lagrangiennes.

Après  $t_*$  la transformation lagrangienne (2b), qui n'est plus bijective, n'est plus légitime. On peut toutefois étendre formellement les expressions F-L (16), (17), (20), ce qui définit une « solution formelle »  $\hat{u}_f(t, k)$  pour tout temps. Sous des hypothèses convenables (champ initial à support compact par exemple), cette solution formelle est, pour tout nombre d'onde  $k$ , une fonction entière du temps qui coïncide avec  $\hat{u}(t, k)$  jusqu'à  $t_*$ . Partant par exemple de (17) ou partant de la définition de la transformée de Fourier (15) et utilisant dans une récurrence l'équation de Burgers, on établit en effet facilement le

développement de Taylor temporel de  $\hat{u}(t, k)$  autour de l'instant origine; cette série s'écrit :

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{u}(t, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} C_n(k) t^n, \\ C_n(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{(-ik)^n}{n+1} \int_{\mathbb{R}} e^{-ika} [u_0(a)]^{n+1} da, \end{array} \right.$$

et possède un rayon de convergence infini. Le fait qu'il ne se produise apparemment aucune singularité à  $t_*$ , quand on ne manipule que les amplitudes de Fourier de nombre d'onde  $k$  fixé, s'interprète en remarquant que fixer  $k$  revient à observer le phénomène avec un flou de l'ordre de  $1/k$ ; ceci ne permet pas de voir se former les préchocs — ni les chocs —, qui sont des singularités ultraviolettes. Après  $t_*$ , la transformée de Fourier inverse  $u_f(t, x)$  de la fonction  $\hat{u}_f(t, k)$  peut être obtenue géométriquement à partir de la représentation implicite (2); cette dernière devient multivaluée avec plusieurs branches  $u_i(t, x)$  : deux branches directes et une rétrograde sur la figure 3 (pour les constructions géométriques de la solution voir aussi Annexe A). On démontre alors facilement la construction :

$$(28) \quad u_f(t, x) = \sum_i \varepsilon_i(x) u_i(t, x),$$

où  $\varepsilon = +1$  sur les branches directes et  $\varepsilon = -1$  sur les rétrogrades. A tout instant  $t$  postérieur à  $t_*$ ,  $u_f(t, x)$  est donc une fonction continue, qui ne vérifie l'équation de Burgers que dans les zones où (2a) est univaluée. Aux extrémités de cette zone, il y a perte de différentiabilité, avec comportement local en  $x^{1/2}$  (voir fig. 3). Ces points singuliers du champ de vitesse formel peuvent être interprétés comme un ré-éclatement en deux singularités réelles, en racine carrée, de la singularité en racine cubique (préchoc) de l'instant  $t_*$ , résultant elle-même de la coalescence de singularités complexes du type racine carrée (voir fig. 4). A ce scénario d'une phase formelle « post- $t_*$  », qui est simplement la poursuite dans le domaine réel du scénario pré- $t_*$ , il faut opposer le véritable comportement de la phase dissipative, se traduisant par une perte de la continuité, avec formation de chocs (§ 2.2). Dans cette phase formelle, la transformée de Fourier a un comportement asymptotique ( $k \rightarrow \infty$ ) semblable à (23), mais avec un terme oscillant au lieu de la coupure exponentielle, vu qu'il y a maintenant une paire de singularités réelles. Notons que la loi de puissance  $k^{-3/2}$  de la phase formelle a la même universalité que dans la limite  $t \uparrow t_*$ ; en effet l'exposant  $3/2$  ne dépend pas de la forme locale cubique (6) utilisée ici pour la donnée initiale : dans le scénario formel, pour une forme initiale de degré  $(2m+1)$ , la singularité réelle ré-éclate en  $m$  paires de points, dont une paire réelle; en chacun de ces points ( $\partial X/\partial a$ ) s'annule simplement, et au voisinage le champ est en racine carrée.

## 2.2. LIMITE INVISCIDE EN PHASE DISSIPATIVE AVEC CHOCS

On va s'intéresser dans ce paragraphe aux représentations Fourier-Lagrangiennes dans la phase dissipative; on en déduit le comportement asymptotique ( $k \rightarrow \infty, t \downarrow t_*$ ) de la

transformée de Fourier du champ de vitesse. Ces représentations s'avéreront particulièrement utiles dans le cas aléatoire (chap. 3).

Il est utile pour commencer de faire quelques rappels sur la dynamique des chocs dans une optique lagrangienne. Il est aisé d'établir l'existence pour tout temps d'une limite inviscide de la solution de l'équation de Burgers (1) (voir § 4.1 et référence [10]); jusqu'à

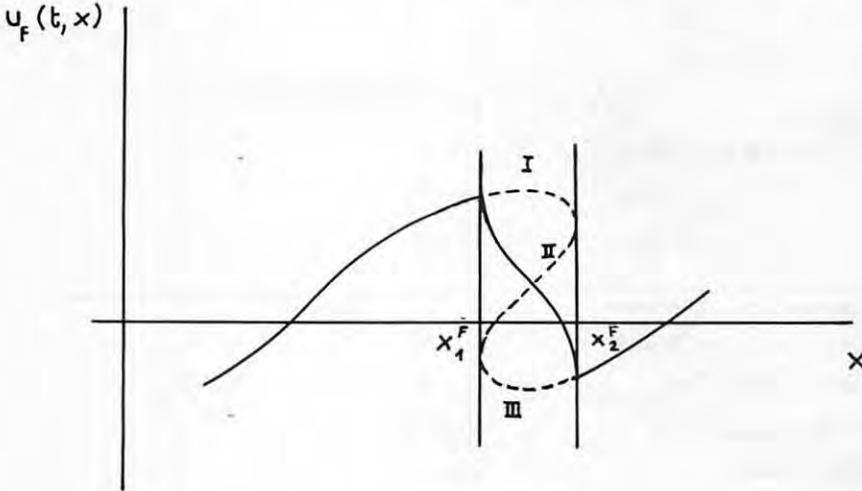


Fig. 3. — « Solution formelle », ou « alternée », (—) construite par déferlement de la « solution multivaluée » (---). Aucune des deux n'est solution de l'équation de Burgers; toutes deux sont solutions de problèmes équivalents jusqu'à l'instant  $t_*$  à l'équation de Burgers. La « solution multivaluée » est la continuation, par morceaux en espace, pour tout temps, de la solution implicite (2); c'est la distribution de vitesses d'un fluide de particules libres, où après  $t_*$ , se produisent des dépassements; dans le problème de Burgers les chocs prohibent ces dépassements. On peut de là construire une fonction univaluée en combinant linéairement les trois branches, avec un facteur  $+1$  pour les branches directes (I et III) et  $-1$  pour la rétrograde (II) : cette « solution formelle »  $u_f(t, x)$  est la transformée de Fourier (spatiale) inverse de la continuation analytique (en temps) après  $t_*$  de la transformée de Fourier (spatiale)  $\hat{u}(t, k)$  (16);  $u_f(t, x)$  a une singularité, en racine carrée, en  $x_1^F$  et  $x_2^F$ ; c'est l'origine du prétendu comportement ultraviolet en  $k^{-3}$  du spectre d'énergie prédit par les méthodes formelles (ou  $k^{-3/2}$  pour l'amplitude de Fourier; voir fig. 6 b) (voir § 2.1 d, § 3.2, § 3.4, annexe A).

Fig. 3. — “Formal” or “alternating solution” (—), obtained by breaking of the “multivalued solution” (---). Neither is solution of Burgers' equation; both are solutions of problems which are equivalent to the Burgers' problem up to  $t_*$ . The “multivalued solution” is obtained by continuing in time the implicit solution (2); it identifies with the velocity distribution of a gas of free particles where crossings occur after  $t_*$ ; in the Burgers' problem, these crossings are prevented by the shocks. From this distribution a singlevalued function may be obtained by linearly combining the three branches with weights  $+1$  and  $-1$  for the direct (I and III) and the retrograde (II) branch respectively: this “formal solution”  $u_f(t, x)$  is the inverse Fourier transform of the analytic continuation (in time) after  $t_*$  of  $\hat{u}(t, k)$  (16);  $u_f(t, x)$  has square root singularities at  $x_1^F$  and  $x_2^F$ ; they give raise to the claimed  $k^{-3}$  UV behaviour, obtained for the energy spectrum when using formal methods (or equivalently  $k^{-3/2}$  for the Fourier amplitude; see Fig. 6 b) (see § 2.1 d, § 3.2, § 3.4, appendix A).

l'instant  $t_*$  de première singularité, cette limite est la solution de l'équation inviscide; au-delà, cette limite, que nous noterons encore  $u(t, x)$ , présente des sauts, et est une solution faible de l'équation inviscide. Ceci entraîne la conservation du moment total P (intégrale de la vitesse). Supposons pour simplifier qu'il y a un seul saut, ou choc, localisé en X(t),

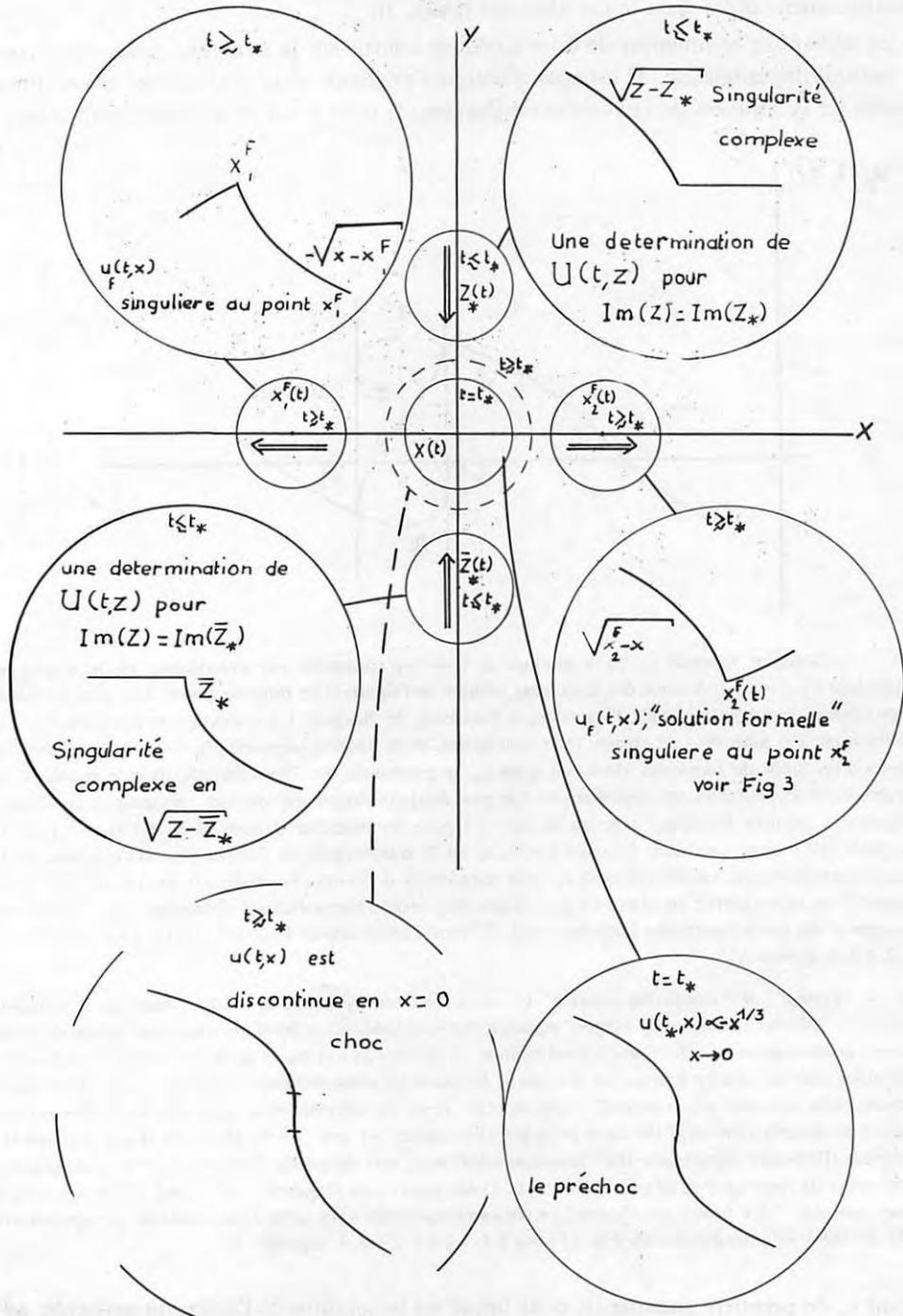


Fig. 4

## EXPLICATION DE LA FIGURE

Fig. 4. — Mouvement et nature des singularités complexes et réelles de la solution de l'équation de Burgers dans la limite inviscide. La première singularité réelle, le préchoc, en racine cubique, se forme à  $t_*$  par coalescence de deux singularités complexes conjuguées en racine carrée (voir § 2.1 c). La continuation dans le domaine réel de ce scénario correspond à la « solution formelle » (§ 2.1 d); en fait dans la solution exacte, il y a, après  $t_*$ , perte de continuité et formation d'un choc (§ 2.2).

Fig. 4. — Motion and nature of complex and real singularities of the solution of Burgers' equation in the inviscid limit. The first real singularity is called the preshock and has a cubic root shape; it appears at  $t_*$  by the collision of two conjugated complex square root singularities (see § 2.1 c). By continuing the scenario in the real domain, one gets the "formal solution" (§ 2.1 d); in fact the exact solution is no continuous for  $t > t_*$ , and a shock appears (§ 2.2).

avec :

$$(29) \quad \lim_{x \downarrow X(t)} u(t, x) = u_-, \quad \lim_{x \uparrow X(t)} u(t, x) = u_+.$$

La conservation de P soit la nullité de sa dérivée temporelle, s'écrit :

$$(30) \quad 0 = \frac{1}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx u(t, x) = \int_{-\infty}^{X(t)} dx \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dX(t)}{dt} (u_- - u_+) + \int_{X(t)}^{+\infty} dx \frac{\partial u}{\partial t};$$

l'équation de Burgers inviscide est vérifiée au sens fort à gauche et à droite du choc; on déduit de (30) le mouvement du choc :

$$(31) \quad \frac{dX(t)}{dt} = \frac{u_- + u_+}{2}.$$

Un calcul similaire peut être mené pour l'évolution de l'énergie totale, et conduit à :

$$(32) \quad \frac{dE}{dt} = -\frac{1}{12} (u_- - u_+)^3.$$

A viscosité positive l'énergie vérifie :

$$(33) \quad \frac{dE}{dt} = -2\nu\Omega(t),$$

et est donc nécessairement décroissante; en conséquence la solution faible obtenue dans la limite inviscide vérifie la « condition d'entropie »  $u_- \geq u_+$ ; après  $t_*$ , cette solution dissipe l'énergie à un taux fini. Cette dissipation peut s'interpréter par l'absorption dans le choc, localisé en  $X(t)$ , des particules initialement réparties dans un intervalle lagrangien  $[a_-, a_+]$ . Une fois absorbées dans le choc, ces particules ne conservent pas leur vitesse initiale, mais voyagent ensemble à la vitesse du choc; en dehors du choc en revanche la solution implicite (2) reste valable, de sorte que par continuité à gauche et à droite respectivement, on a  $u_0(a_-) = u_-$ ;  $u_0(a_+) = u_+$ . Avec ces remarques, la position eulérienne, à un instant  $t > t_*$ , d'une particule située initialement en  $a$ , est entièrement définie. Nous notons  $X_e(t, a)$  cette fonction continue monotone, illustrée figure 5; l'indice  $e$  est pour

« exacte »; si, en dehors des chocs,  $X_e(t, a)$  est encore donnée par  $X(t, a)$  (formule 2 b), elle s'en distingue à l'intérieur de l'intervalle  $[a_-, a_+]$ , où elle est constante et égale à  $X(t)$ . Ce plateau est obtenu graphiquement en coupant selon une règle de Maxwell la courbe, non

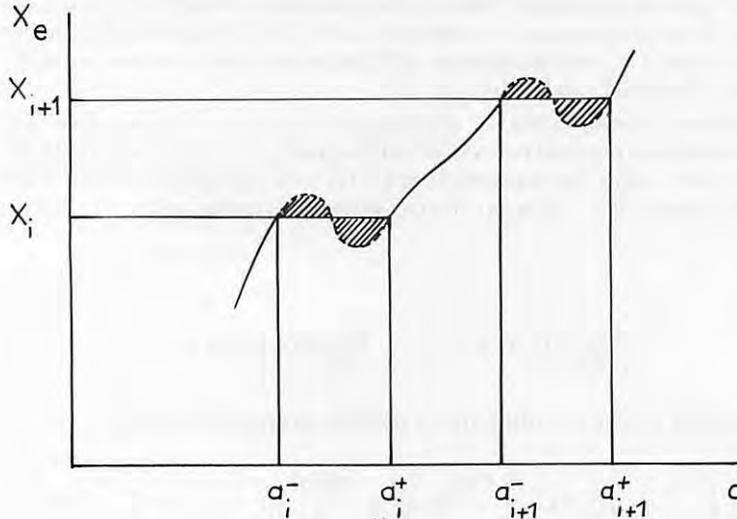


Fig. 5. — Position eulérienne exacte  $X_e(t, a)$  (—) dans la phase dissipative ( $t > t_*$ ); elle s'obtient par une règle d'aires égales (///) à partir de la continuation analytique (---) de la fonction  $X(t, a) = a + tu_0(a)$ ; le choc, d'abscisse eulérienne  $X_i$ , a absorbé les particules de l'intervalle lagrangien  $[a_i^-, a_i^+]$  (voir § 2.2 et annexe A).

Fig. 5. — Exact eulerian position  $X_e(t, a)$  (—) during the dissipative phase; it is obtained by applying a (Maxwell) equal areas law (///) to the analytic continuation (---) of the function  $X(t, a) = a + tu_0(a)$ ; the shock with eulerian coordinate  $X_i$  has absorbed the particles of the Lagrangian interval  $[a_i^-, a_i^+]$  (see § 2.2 and appendix A).

monotone, obtenue en étendant à tout  $t$  et tout  $a$  la formule (2 b) :  $X(t, a) = a + tu_0(a)$ . Soit en effet  $S(t)$  l'aire algébrique de la zone, hachurée sur la figure 5, comprise entre  $X$  et  $X_e$ . Jusqu'à  $t_*$  elle est nulle; à un instant ultérieur on a :

$$(34) \quad S(t) = \int_{a_-(t)}^{a_+(t)} [a + tu_0(a) - X(t)] da,$$

tenant compte de la vitesse du choc (31), il est facile d'évaluer :

$$(35) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{S(t)}{t} \right) = \frac{a_+ - a_-}{2t^2} [-(a_+ + a_-) + 2X(t) - t(u_+ + u_-)] = 0,$$

ce qui assure  $S(t) = 0, \forall t$ . Une autre construction, également avec une règle de Maxwell, est rappelée dans l'Annexe A. Ces diverses approches résolvent en fait le même problème, celui de lever l'ambiguïté due à la multivaluation de la solution implicite. C'est génériquement un pli, et la règle de Maxwell donne lieu, comme prévisible, à la catastrophe de Riemann-Hugoniot; le champ de vitesse, non différentiable à  $t_*$  (préchoc), est discontinu après  $t_*$  (choc).

L'amplitude du choc peu après  $t_*$  peut être calculée en effectuant sur la figure 5 une analyse locale semblable à celle du paragraphe 2.1 a. On développe  $X(t, a)$  et  $u_0(a)$  au voisinage de l'origine comme en (6), (7);  $a_-$  et  $a_+$  sont solutions de :

$$(36) \quad X(t, a_{\pm}) = 0 = -\frac{t-t_*}{t_*} a_{\pm} + \frac{b}{6} t a_{\pm}^3,$$

d'où :

$$(37a) \quad a_{\pm} \underset{t \downarrow t_*}{\propto} (t-t_*)^{1/2},$$

$$(37b) \quad u_- - u_+ \underset{t \downarrow t_*}{\propto} (t-t_*)^{1/2}.$$

Nous construisons maintenant des représentations Fourier-Lagrangiennes de la solution dans la limite inviscide, valables dans la phase dissipative [19]. On utilise pour cela la position eulérienne exacte  $X_e(t, a)$  introduite ci-dessus. Soit  $I_i = [a_{i-}, a_{i+}]$  l'intervalle lagrangien du choc n°  $i$ , et soit  $A = \mathbb{R} \setminus (\cup_i I_i)$  le complémentaire des intervalles de chocs; la représentation implicite (2) est correcte dans  $A$ , qu'elle envoie bi-univoquement dans  $\mathbb{R}$ . Comme dans la phase régulière on obtient donc :

$$(38) \quad \hat{u}(t, k) = \frac{1}{2\pi} \int_A e^{-ikX(t,a)} u_0(a) \frac{\partial X}{\partial a} da.$$

Dans  $A$ ,  $X(t, a)$  et  $X_e(t, a)$  coïncident; en dehors de  $A$ ,  $(\partial X_e / \partial a)$  s'annule; on peut donc écrire :

$$(39) \quad \hat{u}(t, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikX_e(t,a)} u_0(a) \frac{\partial X_e(t, a)}{\partial a} da,$$

qui fournit une première représentation F-L pour la phase dissipative. Notons que cette représentation est « moins explicite » que dans la phase régulière, puisque  $X_e$  requiert la construction des intervalles de chocs; il en est de même pour la seconde et la troisième représentation F-L. La seconde est de nouveau obtenue par intégration par parties :

$$(40) \quad \hat{u}(t, k) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ik} \int_{\mathbb{R}} da e^{-ikX_e(t,a)} u'_0(a), \quad k \neq 0.$$

Pour la troisième représentation, nous introduisons le déplacement lagrangien « exact » :

$$(41) \quad \xi_e(t, a) = X_e(t, a) - a.$$

Dans  $A$ ,  $\xi_e(t, a)$  est identique à  $\xi(t, a)$ , et l'on peut donc remplacer  $u'_0(a)$  par  $(1/t) \partial \xi_e / \partial a$ ; ce changement, incorrect dans les intervalles de choc, peut toutefois être fait partout dans le calcul de l'intégrale (40), comme on le vérifie facilement en utilisant, pour  $a \in [a_-, a_+]$ ,

les relations :

$$(42) \quad \begin{cases} X_e(t, a) = X(t) = a_- + tu_0(a_-) = a_+ + tu_0(a_+), \\ \frac{\partial \xi_e}{\partial a}(t, a) = -1. \end{cases}$$

Après intégration par parties, on obtient la troisième représentation :

$$(43) \quad \hat{u}(t, k) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{ikt} \int_{\mathbb{R}} e^{-ika} [e^{-ik\xi_e(t, a)} - 1] da, \quad k \neq 0.$$

Le comportement asymptotique aux grands nombres d'onde, pour  $t \downarrow t_*$ , de  $\hat{u}(t, k)$  peut être obtenu à partir de la deuxième représentation F-L (40). A l'intérieur (lagrangien) du choc,  $X_e$  est constant; on a donc une phase « super-stationnaire », sur un intervalle proportionnel à  $(t - t_*)^{1/2}$ ; aux « très grands nombres d'onde » il vient donc dans la transformée de Fourier une contribution  $\hat{u}_I(t, k)$ , d'amplitude :

$$(44) \quad |\hat{u}_I(t, k)| \underset{\substack{t \downarrow t_* \\ k \rightarrow +\infty}}{\propto} (t - t_*)^{1/2} k^{-1},$$

due à la discontinuité du champ de vitesse. A des nombres d'onde plus « modérés », la forme (génériquement) cubique du voisinage du choc se fait encore sentir. En effectuant un calcul semblable à celui du paragraphe 2.1 c, on obtient un terme :

$$(45) \quad |\hat{u}_{II}(t, k)| \underset{\substack{t \downarrow t_* \\ k \rightarrow +\infty}}{\simeq} k^{-4/3} \text{Ai} \left[ -\left(\frac{bt_*^3}{2}\right)^{-1/3} k^{2/3} (t - t_*) \right];$$

la fonction de Airy est d'ordre 1 pour des nombres d'onde de l'ordre de  $K_2(t) \propto (t - t_*)^{-3/2}$ , et tend vers zéro quand  $k/K_2(t)$  tend vers l'infini. Les contributions I et II sont de même ordre pour  $k \simeq K_2(t)$ ;  $\hat{u}_{II}$  domine en deçà, et  $\hat{u}_I$  au-delà.

Peu après  $t_*$ , le régime en  $k^{-4/3}$  de l'instant  $t_*$  du préchoc subsiste donc pour des nombres d'onde vérifiant  $1 \ll k \leq K_2(t)$ ; au-delà, les chocs (« oubliés » dans la « solution formelle » introduite au paragraphe 2.1 d) donnent un comportement en  $k^{-1}$ ; soulignons que c'est en remontant le spectre vers l'infrarouge que s'établit ce régime caractéristique de la phase dissipative.

Le comportement asymptotique aux grands nombres d'onde de la transformée de Fourier  $\hat{u}(t, k)$ , dans la phase régulière ( $t \lesssim t_*$ ) et dans la phase dissipative ( $t \gtrsim t_*$ ) est résumé dans les figures 6 a, b; sur la figure 6 b on a également porté le comportement (non physique) de la phase formelle.

### 3. L'équation de Burgers statistique.

Dans ce chapitre on se donne les propriétés statistiques du champ de vitesse initial  $u_0(x)$ , et l'on s'intéresse aux propriétés statistiques de la solution à un instant  $t > 0$ , dans la limite inviscide ( $\nu \downarrow 0$ ).

Le problème est précisé au paragraphe 3.1. Les représentations Fourier-Lagrangiennes de la solution sont étendues au cas aléatoire au paragraphe 3.2. Nous nous en servons pour étudier en détail deux cas : celui de conditions initiales à gradient uniformément borné (§ 3.3); et de conditions initiales gaussiennes (§ 3.4). Pour obtenir des résultats sous la forme la plus explicite possible, nous nous sommes intéressés essentiellement à des situations asymptotiques : non seulement  $\nu \downarrow 0$  (indispensable pour l'utilisation des représentations F-L), mais nombre d'onde  $k$  tendant vers l'infini, et  $t$  voisin de l'instant  $T_*$  d'accumulation des singularités (préchocs) des réalisations individuelles.

Dans la phase régulière (avant  $T_*$ ), les représentations F-L peuvent conduire à des expressions entièrement explicites pour les moments, à condition de disposer, pour le spectre par exemple, de la fonction caractéristique des accroissements du champ initial. Cette dernière condition est réalisée avec des conditions initiales gaussiennes, mais alors  $T_* = 0$ ; en « oubliant » qu'on est ainsi immédiatement dans la phase dissipative, on peut mener des calculs explicites (§ 3.4); comme les resommations formelles de séries (§ 3.4) ou de polynômes de Wiener-Hermite ([25], [26]), ces calculs mènent à des prédictions erronées.

#### 3.1. HYPOTHÈSES ET PROCÉDÉS DE MOYENNISATION

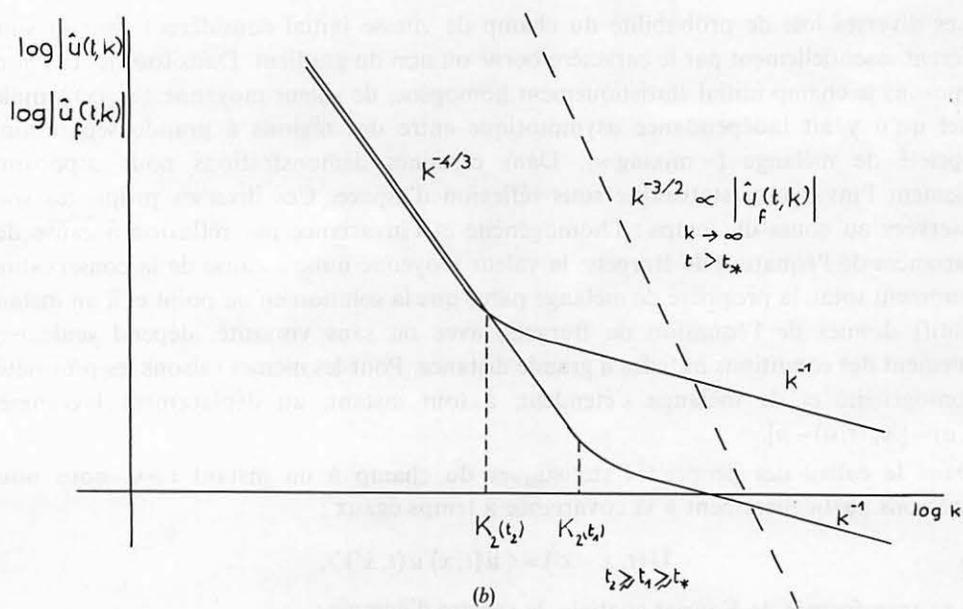
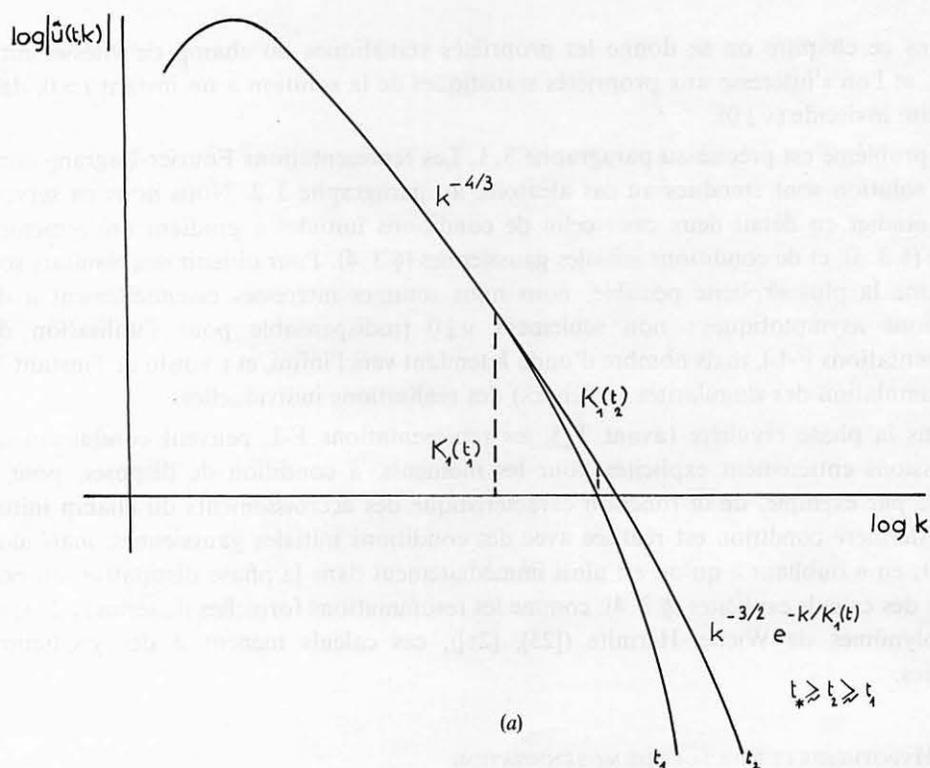
Les diverses lois de probabilité du champ de vitesse initial considérées dans la suite diffèrent essentiellement par le caractère borné ou non du gradient. Dans tous les cas nous supposons le champ initial statistiquement homogène, de valeur moyenne  $\langle u_0(x) \rangle$  nulle, et tel qu'il y ait indépendance asymptotique entre des régions à grande séparation : propriété de mélange (« mixing »). Dans certaines démonstrations nous supposons également l'invariance statistique sous réflexion d'espace. Ces diverses propriétés sont conservées au cours du temps : l'homogénéité et l'invariance par réflexion à cause des invariances de l'équation de Burgers; la valeur moyenne nulle à cause de la conservation du moment total; la propriété de mélange parce que la solution en un point et à un instant (positif) donnés de l'équation de Burgers, avec ou sans viscosité, dépend seulement faiblement des conditions initiales à grande distance. Pour les mêmes raisons les propriétés d'homogénéité et de mélange s'étendent, à tout instant, au déplacement lagrangien  $\xi(t, a) = [X_e(t, a) - a]$ .

Dans le calcul des propriétés statistiques du champ à un instant  $t > 0$ , nous nous intéressons particulièrement à la covariance à temps égaux :

$$(46) \quad U(t, x - x') = \langle u(t, x) u(t, x') \rangle,$$

et à sa transformée de Fourier spatiale, le spectre d'énergie :

$$(47) \quad E(t, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} U(t, x) dx;$$



## EXPLICATION DE LA FIGURE

Fig. 6. — Représentation log-log du comportement ultraviolet de l'amplitude de Fourier  $|\hat{u}(t, k)|$  au voisinage de l'instant  $t_*$ , dans le cas déterministe. Un comportement self-similaire (en  $k^{-4/3}$ ) s'observe à l'instant  $t_*$  du préchoc (génériquement en racine cubique) (voir fig. 2; fig. 4; § 2.1 a, b, c). A  $t \lesssim t_*$  (fig. 6 a), cette zone s'étend seulement jusqu'à une coupure  $K_1(t)$ , au-delà de laquelle il y a décroissance rapide, gouvernée par  $m$  paires de singularités complexes en racine carrée (voir fig. 4; § 2.1 c); le préfacteur universel  $k^{-3/2}$  multiplie, dans le cas  $m=1$ , une exponentielle décroissante de décrement  $K_1(t) \propto (t_* - t)^{-3/2}$  (voir aussi réf. [22]). Après  $t_*$  (fig. 6 b) apparaît dans l'extrême ultraviolet la zone inertielle en  $k^{-1}$  due aux chocs (fig. 4; § 2.2); son amplitude, déterminée par la longueur lagrangienne des chocs [(37 a); (44); voir fig. 5], détermine le nombre d'onde de transition  $K_2(t) \propto (t - t_*)^{-3/2}$ ; la zone en  $k^{-4/3}$ , souvenir du préchoc, disparaît progressivement. La (pseudo-) solution formelle (§ 2.1 d) donne lieu à une illusoire loi d'échelle universelle en  $k^{-3/2}$  (- - -), à cause de singularités/réelles en racine carrée (fig. 3 et 4).

Fig. 6. — Log-Log representation of the UV behaviour of the Fourier amplitude  $|\hat{u}(t, k)|$  for  $t \approx t_*$  (deterministic case). A self-similar ( $k^{-4/3}$ ) behaviour takes place at the preshock-time  $t_*$  (the preshock has generically a cubic root profile) (see Fig. 2; Fig. 4; § 2.1 a, b, c). For  $t \lesssim t_*$  (Fig. 6 a) this range extends only up to a cutoff  $K_1(t)$ ; beyond the cutoff there is a fast decreasing function, with a shape governed by  $m$  pairs of square root complex singularities (see Fig. 4; § 2.1 c); in the case  $m=1$ , this function is the product of an universal  $k^{-3/2}$  prefactor by an exponentially decreasing function, with logarithmic decrement  $K_1(t) \propto (t_* - t)^{-3/2}$  (see also ref. [22]). After  $t_*$  (Fig. 6 b) a  $k^{-1}$  inertial range due to the shocks appears in the extreme UV (Fig. 4; § 2.2); its amplitude is governed by the Lagrangian length of the shocks [(37 a); (44); see Fig. 5], and determines the transition wavenumber  $K_2(t) \propto (t - t_*)^{-3/2}$ ; the  $k^{-4/3}$  range, which is a reminiscence of the preshock, gradually disappears. The "formal solution"—which is not a solution—(§ 2.1 d) gives raise to an illusory  $k^{-3/2}$  scaling law (- - -), claimed to be universal by some authors, but actually related to fictitious square root real singularities (Fig. 3 and 4).

celui-ci peut être relié directement à la transformée de Fourier  $\hat{u}(t, k)$  (15) du champ de vitesse par la formule :

$$(48) \quad \langle \hat{u}(t, k) \hat{u}(t, k') \rangle = \delta(k + k') E(t, k).$$

Partant de l'équation de Burgers pour évaluer ces moyennes, on se heurte au classique problème de fermeture de la turbulence : la non-linéarité fait que la dérivée temporelle des moments d'ordre  $n$  s'exprime en fonction des moments d'ordre  $(n+1)$ . Comme dans d'autres problèmes de turbulence, cette difficulté a été surmontée à l'aide de troncatures et méthodes de fermeture variées ([27]-[34]). Ces méthodes, d'une part ne permettent pas en général de contrôler l'erreur commise, d'autre part conduisent à des équations, certes fermées, mais souvent encore assez complexes. C'est ainsi que la fermeture obtenue par introduction d'un couplage aléatoire markovien entre diverses réalisations de l'équation de Burgers, dite Markovian Random Coupling Model (MRCM) ([33], [34]), conduit à des prédictions dont l'universalité au moins est discutable (voir par exemple § 3.3 ci-dessous); quant au comportement de la solution de l'équation de Burgers-MRCM à petite échelle et près du temps de singularité, il n'a été établi rigoureusement que récemment [35].

En nous appuyant sur diverses représentations de la solution déterministe, nous étudions dans la suite le problème statistique directement sur l'équation de Burgers primitive; au chapitre 4, on présente un calcul asymptotique aux temps longs basé sur la représentation de Hopf-Cole; ci-dessous nous étudions en particulier le voisinage de  $T_*$  à l'aide des représentations Fourier-Lagrangiennes.

*Remarque.* — A viscosité positive, le seul état stationnaire est trivial. Des états stationnaires non triviaux peuvent être obtenus d'au moins deux façons. Premièrement on

peut introduire dans le second membre de (1) une force aléatoire de statistique donnée; les propriétés infrarouges de ce système ont été étudiées par Forster, Nelson et Stephen [36]. Deuxièmement, on peut introduire un terme déstabilisant de type viscosité négative, comme dans l'équation de Kuramoto ([37], [38]). (Voir aussi chap. 5.)

### 3.2. LES REPRÉSENTATIONS FOURIER-LAGRANGIENNES DANS LE CAS ALÉATOIRE

Nous restreignons l'étude au spectre instantané défini en (46)-(48); la méthode peut se généraliser à des moments d'ordre plus élevé ou à temps inégaux. Le point de départ est fourni par les représentations Fourier-Lagrangiennes du paragraphe 2.2, correctes aussi bien dans la phase régulière que dans la phase singulière, pourvu qu'on utilise les position et déplacement lagrangien « exacts ». Toutefois seule la première (39) est réellement applicable au cas aléatoire; la démonstration des deux autres, (40) et (43), utilise en effet, lors d'intégrations par parties, l'hypothèse que la donnée initiale s'annule à l'infini, remplacée maintenant par une hypothèse d'homogénéité statistique. Cette première représentation F-L du champ conduit à une première représentation F-L du spectre; partant de celle-ci on peut obtenir pour le spectre une deuxième et une troisième représentation F-L, données ci-dessous, mais les démonstrations particulières qu'elles requièrent sont seulement esquissées, les détails étant laissés au lecteur.

La première représentation F-L (39) du champ conduit immédiatement, après échange des intégrales et de la moyenne, à la première représentation F-L de la corrélation :

$$(49) \quad \langle \hat{u}(t, k) \hat{u}(t, k') \rangle = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left\langle u_0(a) u_0(a') \frac{\partial X_e}{\partial a} \frac{\partial X'_e}{\partial a'} \right. \\ \left. \times \exp[-i(k X_e + k' X'_e)] \right\rangle da da',$$

où  $X_e$  désigne  $X_e(t, a)$  et  $X'_e$  désigne  $X'_e(t, a')$ ; nous supprimons dans la suite l'indice  $e$  pour « exact », et introduisons la notation  $w(a)$  pour le gradient initial. On peut appliquer à (49) une méthode d'« intégration par parties statistique »; la nullité des termes intégrés  $y$  est assurée en valeur moyenne, par suite de l'homogénéité et de la propriété de mélange. Introduisant le déplacement lagrangien  $\xi$ , et utilisant l'homogénéité, on déduit une deuxième représentation F-L, écrite ici pour le spectre :

$$(50) \quad E(t, k) = \frac{1}{2\pi} k^{-2} \int_{\mathbb{R}} dh \\ \times \exp(-ikh) \langle w(0) w(h) \exp\{-ik[\xi(t, h) - \xi(t, 0)]\} \rangle, \quad k \neq 0.$$

Comme au paragraphe 2.2, on peut, sous l'intégrale, remplacer  $w(h)$  par  $t^{-1}(\partial\xi/\partial h)$ ; utilisant l'homogénéité et une double intégration par parties statistiques, on obtient une troisième représentation F-L du spectre :

$$(51) \quad E(t, k) = \frac{1}{2\pi} k^{-2} t^{-2} \int_{\mathbb{R}} dh \exp(-ikh) [\mathcal{C}(t, k; h) - \mathcal{C}(t, k; 0)],$$

où :

$$(52) \quad \mathcal{C}(t, k; h) = \langle \exp\{-ik[\xi(t, h) - \xi(t, 0)]\} \rangle.$$

Notons que ces trois représentations sont valables en phase régulière et en phase dissipative; dans la phase régulière, pendant laquelle  $\xi(t, h) = tu_0(h)$ , la quantité  $\mathcal{C}(t, k; h)$  est la fonction caractéristique, prise à l'argument  $kt$ , de l'accroissement du champ de vitesse initial sur une distance  $h$ ; pour tout processus pour lequel la distribution de probabilité en deux points est connue (voir § 3.4 pour les processus gaussiens par exemple), cette quantité peut être évaluée explicitement. L'utilisation d'une telle évaluation à un instant où une fraction finie des réalisations a produit une singularité, définit la représentation F-L formelle du spectre, continuation analytique en temps, à nombre d'onde fixé, du spectre de la phase régulière.

Remarquons enfin que les deuxième (50) et troisième (51) représentations ont un préfacteur en  $k^{-2}$ , forme généralement admise pour la zone inertielle (voir discussion chap. 5).

### 3.3. CONDITIONS INITIALES A GRADIENT DE VITESSE UNIFORMÉMENT BORNÉ

Dans le cas déterministe, la solution de l'équation de Burgers (1) dans la limite inviscide reste régulière jusqu'à l'instant  $t_*$  de préchoc donné par (4). Dans un ensemble statistique, chaque réalisation peut avoir un  $t_*$  fini, mais l'ensemble de ces  $t_*$  aléatoires n'a pas nécessairement une borne inférieure (plus précisément une borne inférieure « essentielle » par rapport à la mesure sur l'espace de probabilité sous-jacent) :

$$(53) \quad T_* = \inf_{\text{ess}} \{ t_* \},$$

strictement positive. Dans le cas de conditions initiales gaussiennes, par exemple, le gradient initial peut prendre, avec une probabilité finie, des valeurs arbitrairement grandes, de sorte que  $T_* = 0$ . Pour assurer l'existence d'un  $T_*$  positif, une condition nécessaire et suffisante est l'hypothèse de « gradient borné », dans laquelle le gradient du champ de vitesse initial est presque sûrement uniformément borné; en d'autres termes la densité de probabilité du gradient initial  $P(w)$ , supposée ici exister, s'annule pour  $w < -M$  ( $M$  réel positif fixé; voir fig. 7). Pendant l'intervalle de temps de zéro à :

$$(54) \quad T_* = M^{-1},$$

on peut alors utiliser les représentations F-L de phase régulière du spectre. Après  $T_*$  il faut utiliser des expressions correctes en phase dissipative, dès lors qu'une fraction finie des réalisations a produit une singularité.

Dans la suite de ce paragraphe, nous nous intéressons au cas de conditions initiales à gradient borné. Grâce en particulier aux représentations F-L, nous obtenons sans hypothèses supplémentaires le comportement asymptotique de la solution au voisinage de l'instant  $T_*$ ; il apparaît que ce comportement dépend de la forme de la distribution  $P(w)$  au voisinage de la borne inférieure  $-M$ ; nous supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que  $T_* = M^{-1} = 1$ .

Nous commençons par l'étude de la limite  $t \uparrow T_*$ . Comme dans le cas déterministe, il est intéressant d'examiner le comportement de l'enstrophie. Celle-ci est maintenant définie

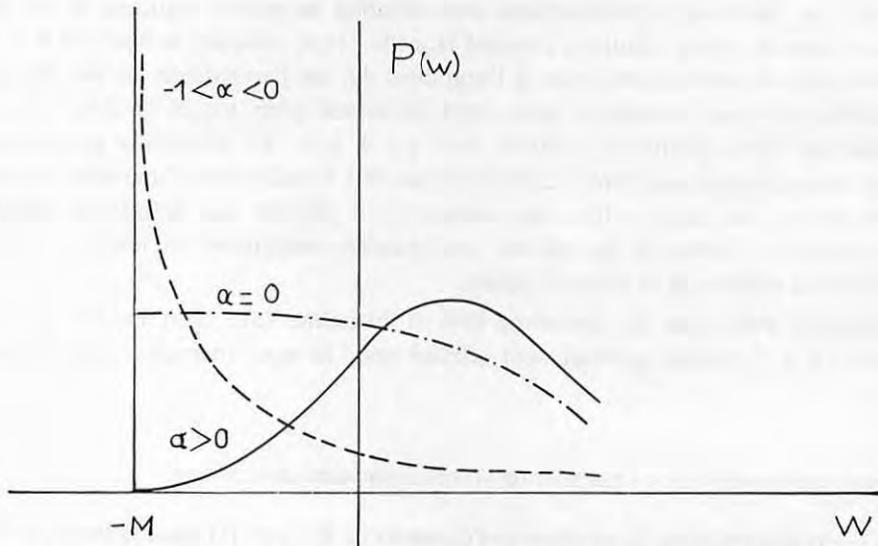


Fig. 7. — Diverses distributions de probabilité  $P(w)$  du gradient initial, avec support borné inférieurement (§ 3.3). L'accumulation près de la borne  $-M$  détermine l'accumulation des instants de singularité  $t_*$  des réalisations individuelles après  $T_* = 1/M$ , et par là le comportement statistique au voisinage de  $T_*$ . Dans le cas d'une loi de puissance  $P(w) \propto (w+M)^\alpha$ , l'exposant  $\alpha$  définit des classes d'universalité (fig. 8 et 9).

Fig. 7. — Examples of probability distributions  $P(w)$  of the initial gradient, in the case of a support bounded from below (§ 3.3). The accumulation near the bound  $-M$  gives rise after  $T_* = 1/M$  to the accumulation of the singularity times  $t_*$  of the individual realizations, and thus determines the statistical behaviour near  $T_*$ . When the distribution follows a power law  $P(w) \propto (w+M)^\alpha$ , the exponent  $\alpha$  defines universality classes (Fig. 8 and 9).

comme la (demi-) valeur moyenne du carré du gradient à l'instant  $t$ ; avant  $T_*$ , on peut utiliser la transformation eulérienne-lagrangienne; par ergodicité de la condition initiale, la formule (13) a un équivalent statistique immédiat :

$$(55) \quad \Omega(t) = \frac{1}{2} \left\langle \frac{w^2}{1+tw} \right\rangle,$$

qui avec les hypothèses et notations introduites plus haut s'écrit aussi :

$$(56) \quad \Omega(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+\infty} \frac{w^2}{1+tw} P(w) dw.$$

La formule (55) peut aussi être obtenue à l'aide de la seconde représentation F-L du spectre (50), en utilisant la relation :

$$\Omega(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 E(t, k) dk,$$

et l'égalité  $\xi(t, h) = tu_0(h)$ . On voit que le comportement critique de l'enstrophie est déterminé par la forme de la distribution  $P(w)$  au voisinage de la borne inférieure  $-1$ .

Pour illustrer, supposons que  $P(w)$  se comporte en loi de puissance au voisinage de  $-1$  :

$$(57) \quad P(w) \underset{w \downarrow -1}{\propto} (w+1)^\alpha;$$

la normalisation de  $P$  impose que l'exposant  $\alpha$ , non nécessairement entier, soit supérieur à  $-1$ . Reportant dans (56), on obtient pour le terme dominant :

$$(58) \quad \Omega(t) \underset{t \uparrow T_*}{\propto} \begin{cases} \text{limite finie} & \text{pour } \alpha > 0, \\ \text{Log}(T_* - t)^{-1} & \text{pour } \alpha = 0, \\ (T_* - t)^\alpha & \text{pour } 0 > \alpha > -1. \end{cases}$$

L'entrophie, infinie après  $T_*$ , ne diverge donc pas nécessairement dans la limite  $t \uparrow T_*$ . De fait l'entrophie diverge dans chaque réalisation mais à un instant  $t_*$  aléatoire, supérieur à  $T_*$ . L'exposant  $\alpha$  de la distribution de gradient initial gouverne l'accumulation des instants de singularité « individuels » vers l'instant statistique  $T_*$ , et permet de définir des classes d'universalité. Ce résultat est à opposer à la prédiction d'une divergence universelle obtenue dans le cadre de certaines théories statistiques de la turbulence. La méthode de fermeture MRCM mentionnée plus haut (§ 3.1) par exemple, conduit [33] à une singularité à un instant  $T_*$ , avec divergence de l'entrophie en  $(T_* - t)^{-1}$ , quelle que soit la statistique initiale. Cette discussion est résumée par la figure 8.

L'analyse asymptotique du spectre  $E(t, k)$  aux grands nombres d'onde, dans la limite  $t \uparrow T_* = 1$ , est parallèle à celle de la transformée de Fourier spatiale du cas déterministe (§ 2.2). Partant de la troisième représentation F-L du spectre (51), (52) en phase régulière, on utilise de nouveau une méthode de phase inflexionnelle, dans laquelle la contribution principale provient du voisinage lagrangien des points qui produisent un préchoc à un instant juste postérieur à  $T_*$ ; en de tels points le gradient initial passe par un minimum, proche de sa borne  $-1$ . Pour effectuer les calculs, on modélise la statistique de ces événements, en approchant localement le gradient initial, autour de ce minimum, par une parabole dont la position, le minimum et la courbure sont aléatoires. On obtient ainsi :

$$(59) \quad E(t, k) \underset{\substack{k \rightarrow \infty \\ t \uparrow T_* = 1}}{\simeq} k^{-3} \int_0^{+\infty} P(-1 + B^{-1} k^{-2/3} s) A i[s + B k^{2/3} (T_* - t)] ds;$$

$B$  est une constante positive; la démonstration, menée dans le cadre du modèle mentionné ci-dessus, est donnée dans l'Annexe B. Notons seulement que le champ initial étant supposé localement cubique, il apparaît, comme dans le cas déterministe (§ 2.1 c), une fonction de Airy; elle est ici pondérée par la distribution du gradient initial  $P(w)$ , qu'on peut, dans le cadre du modèle utilisé, relier asymptotiquement (B.4) à la distribution des minima locaux du gradient initial. Comme celui de l'entrophie, le comportement critique ( $t \uparrow T_*$ ) du spectre aux grands nombres d'onde est donc déterminé par la forme de la distribution du gradient initial au voisinage de la borne inférieure, supposée ici égale à  $-1$ . Poursuivant le calcul avec la loi de puissance (57), on obtient, pour  $\alpha > -1/2$  :

$$(60) \quad \begin{cases} E(t, k) \underset{\substack{t \uparrow T_* \\ k \rightarrow \infty}}{\propto} k^{-3-2\alpha/3} F_\alpha[k/K_1(t)], \\ K_1(t) \underset{t \uparrow T_*}{\propto} (T_* - t)^{-3/2}; \end{cases}$$

$F_\alpha$  est une fonction positive à décroissance rapide.

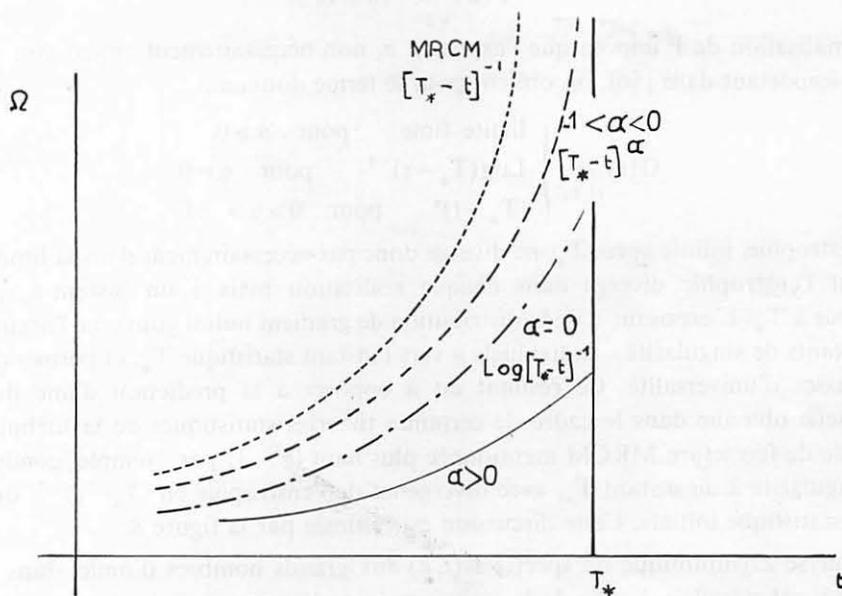


Fig. 8

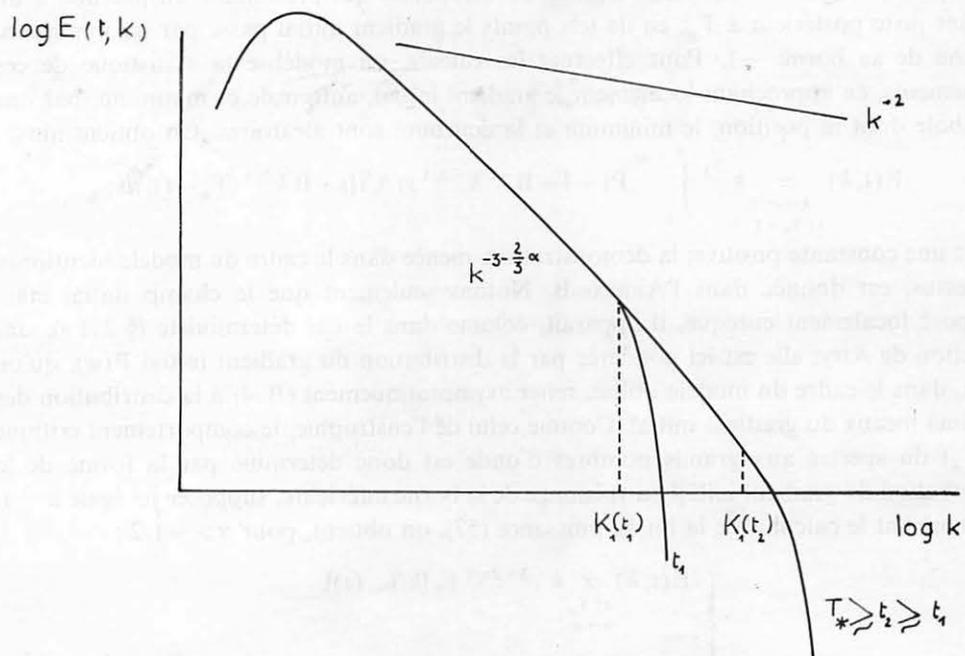


Fig. 9

## EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 8. — Comportement critique ( $t \uparrow T_*$ ) de l'enstrophie  $\Omega = (1/2) \langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle$ , dans le cas de gradient initial borné inférieurement (§ 3.3). Pour une distribution du gradient initial en loi de puissance au voisinage de la borne inférieure  $-M = -1/T_*$  (fig. 7), l'exposant  $\alpha$  définit des classes d'universalité (voir fig. 9 pour le spectre). Pour  $\alpha > 0$  (—), il n'y a pas divergence; pour  $\alpha = 0$  (-.-.-), il y a divergence logarithmique; pour  $-1 < \alpha < 0$  (- - -), il y a divergence en loi de puissance. Ces résultats s'opposent à la divergence universelle en  $(T_* - t)^{-1}$  (...) à l'approche d'un  $T_*$  toujours positif, prédite par le modèle à couplage aléatoire markovien MRCM (§ 3.1) pour toute condition initiale. A noter que dans le cas gaussien,  $T_*$  est en fait l'instant origine (§ 3.4).

Fig. 8. — Critical ( $t \uparrow T_*$ ) behaviour of the enstrophy  $\Omega = (1/2) \langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle$ , in the case of an initial gradient bounded from below (§ 3.3). When the distribution of the initial gradient follows a power law near the bound  $-M = -1/T_*$  (Fig. 7), the exponent  $\alpha$  defines universality classes (see Fig. 9 for the spectrum). When  $\alpha > 0$  (—), the enstrophy remains finite; when  $\alpha = 0$  (-.-.-), it exhibits a logarithmic divergence; when  $-1 < \alpha < 0$  (- - -), it exhibits a power law divergence. These results are not consistent with those of the markovian random coupling model MRCM (§ 3.1) which predicts a  $(T_* - t)^{-1}$  divergence (...) in the  $t \uparrow T_*$  limit, with positive  $T_*$ , whatever the initial distribution. Note that for gaussian initial conditions, the exact  $T_*$  is zero (§ 3.4).

Fig. 9. — Représentation log-log du comportement ultraviolet du spectre d'énergie  $E(t, k)$  aux instants proches (antérieurs) de l'instant  $T_*$  d'accumulation des singularités (condition initiale aléatoire à gradient borné inférieurement) (§ 3.2 et 3.3). Pour une distribution initiale asymptotiquement en loi de puissance (fig. 7), il s'établit une zone self-similaire, dont l'exposant  $(-3 - 2\alpha/3)$  et la coupure  $K_1(t) \propto (T_* - t)^{-3/2}$  expliquent le comportement critique ( $t \uparrow T_*$ ) relativement universel de l'enstrophie  $\Omega(t) = \int k^2 E(t, k) dk$  (fig. 8). Cette zone en loi de puissance, qui s'étend à l'infini à  $T_*$ , est toujours plus raide que le  $k^{-2}$  dû aux chocs (fig. 10).

Fig. 9. — Log-Log representation of the ultraviolet behaviour of the energy spectrum  $E(t, k)$  for  $t \lesssim T_*$  = accumulation time of the singularities (case of random initial condition with gradient bounded from below) (§ 3.2 and 3.3). When the initial probability distribution follows asymptotically a power law (Fig. 7), a self-similar range establishes with exponent  $(-3 - 2\alpha/3)$  and cutoff  $K_1(t) \propto (T_* - t)^{-3/2}$ ; this is consistent with the relatively universal critical ( $t \uparrow T_*$ ) behaviour of the enstrophy  $\Omega(t) = \int k^2 E(t, k) dk$  (Fig. 8). At  $T_*$  this power law range extends to infinity; it is always steeper than the  $k^{-2}$  law produced by the shocks (Fig. 10).

Aux instants proches (antérieurs) de l'instant  $T_*$  d'accumulation des préchocs, le spectre prend donc une forme self-similaire illustrée figure 9; le comportement de la coupure et l'exposant de la zone en loi d'échelle (60) sont, pour tout  $\alpha > -1$ , cohérents avec les résultats obtenus plus hauts pour le comportement critique de l'enstrophie (58). A l'instant  $T_*$  le spectre est, pour les cas ici considérés, une loi de puissance dont l'exposant  $-3 - 2\alpha/3$  n'est pas égal à l'exposant  $-8/3$  du cas déterministe (cf. § 2.1 c). En fait cette loi en  $k^{-3 - 2\alpha/3}$  résulte de la moyenne pondérée des profils à décroissance rapide (23) dus aux préchocs en formation; en effet, à l'instant  $T_*$ , dans les réalisations individuelles (presque sûrement) aucun préchoc n'est encore formé. Il est remarquable que la loi en  $k^{-3 - 2\alpha/3}$  soit toujours plus raide que la loi inertielle universelle en  $k^{-2}$  classiquement admise pour la phase dissipative (voir par exemple [3]). Comme nous le verrons, la loi en  $k^{-2}$  s'établit effectivement après l'instant  $T_*$  (voir fig. 10) mais, comme dans le cas déterministe, ce régime ne résulte pas d'une cascade s'établissant progressivement. Dans le comportement à  $T_*$  il y a une certaine universalité en ce que le détail de la statistique de la vitesse initiale n'est pas pertinent, seul l'exposant, qui caractérise la distribution de probabilité du gradient initial près de sa borne inférieure, influe sur le comportement critique de l'enstrophie et du spectre d'énergie.

Notons qu'un comportement à l'instant  $T_*$  différent du comportement inertiel dissipatif s'observe également avec des modèles de turbulence « en couches » du type Desnyanski-Novikov [39], étudiés en détail par Bell et Nelkin ([40], [41]).

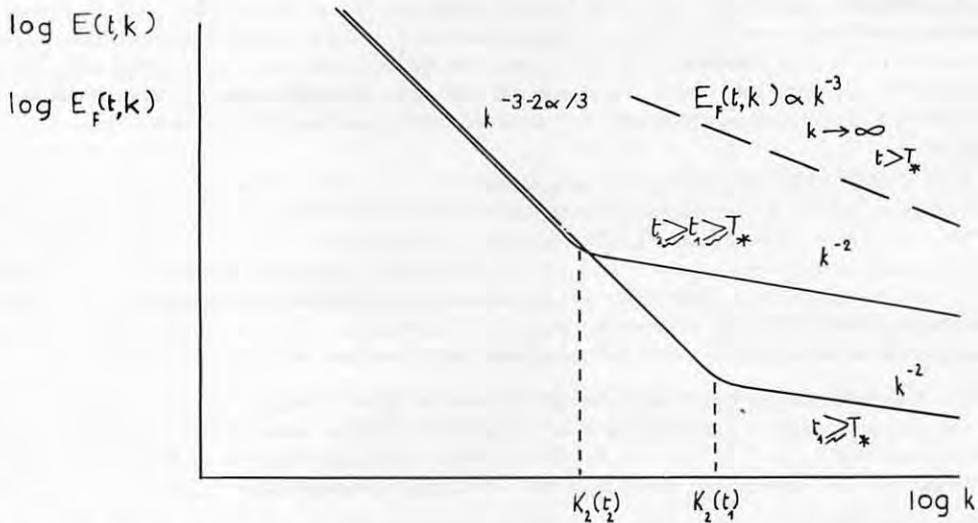


Fig. 10. — Représentation log-log du comportement ultraviolet du spectre d'énergie  $E(t, k)$  aux instants proches (postérieurs) de l'instant  $T_*$  d'accumulation des singularités (condition initiale à gradient borné inférieurement) (§ 3.2 et 3.3). La loi en  $k^{-2}$  caractéristique de cette phase dissipative apparaît d'abord dans l'extrême ultraviolet, et remonte ensuite vers l'infrarouge; son amplitude, déterminée par la longueur lagrangienne moyenne des chocs, détermine le nombre d'onde de transition. Dans le cas d'une distribution initiale du gradient en loi de puissance (fig. 7), la transition se fait à  $K_2(t) \propto (t - T_*)^{-3/2}$  [cf. (64), (65)]; en deçà survit le régime self-similaire de l'instant  $T_*$ , qui disparaît progressivement. Les méthodes formelles (§ 3.3 et 3.4) prédisent un comportement incorrect en  $k^{-3}$  (- -).

Fig. 10. — Log-log representation of the ultraviolet behaviour of the energy spectrum  $E(t, k)$  for  $t \gtrsim T_*$  = accumulation time of the singularities (case of random initial conditions with gradient bounded from below) (§ 3.2 and 3.3). The  $k^{-2}$  law, which is the characteristic feature of this dissipative phase, appears first in the extreme ultraviolet; it then overruns smaller wavenumbers ("infrared contamination"); its amplitude is governed by the mean Lagrangian length of the shocks, and determines the transition wavenumber. When the initial distribution of the gradient follows a power law (Fig. 7), the transition takes place at  $K_2(t) \propto (t - T_*)^{-3/2}$  [see (64), (65)]; the self-similar regime present at  $T_*$  persists for wavenumbers less than  $K_2(t)$ , and thus gradually disappears. The formal methods (§ 3.3 and 3.4) give the wrong  $k^{-3}$  prediction (- -).

Passons maintenant au comportement du spectre dans la phase dissipative ( $t > T_*$ ; la troisième représentation F-L (51), (52) s'écrit alors :

$$(61) \quad E(t, k) = \frac{1}{2\pi} k^{-2} t^{-2} \int_{\mathbb{R}} dh \langle \exp \{ -ik [X_e(t, h) - X_e(t, 0)] \} \rangle,$$

à l'aide de  $X_e(t, h)$ , la position eulérienne exacte (§ 3.2), constante dans tout intervalle de choc. Dans un calcul asymptotique aux très grands nombres d'onde on peut, comme dans le cas déterministe (§ 2.2), effectuer une analyse de phase « super-stationnaire ». Ceci revient ici à ne retenir que la contribution des événements où l'origine et le point  $h$  sont dans un même intervalle de choc; dans toute autre situation, la moyenne de l'exponentielle

oscillante donne, dans la limite  $k \rightarrow \infty$ , une contribution nulle à l'intégrale (61). En conséquence aux très grands nombres d'onde (extrême ultraviolet) le spectre suit une loi :

$$(62) \quad E_{EUV}(t, k) \underset{k \rightarrow \infty}{\propto} I(t) k^{-2},$$

où  $I(t)$  est la longueur lagrangienne moyenne d'un intervalle de choc. On ne possède pas d'expression générale des paramètres des chocs à un instant quelconque, encore moins après moyenne. Toutefois dans la limite  $t \downarrow T_*$ , les chocs sont rares, et de faible amplitude. On peut donc légitimement considérer que dans une réalisation donnée il y a alors, par unité de longueur, au plus un choc, et que celui-ci peut être décrit par analyse locale (cf. § 2.2); en particulier, si le préchoc s'est formé à  $t_*$ , à un instant ultérieur  $t$  tel que  $t \gtrsim t_* \gtrsim T_*=1$ , la longueur de l'intervalle lagrangien du choc correspondant est proportionnelle (37 a) à  $(t-t_*)^{1/2}$ , et  $t_*$  est en général le premier instant de singularité de cette réalisation. La probabilité d'un tel événement peut donc être approchée par la probabilité de trouver une valeur du gradient initial exactement égale à  $(-1/t_*)$ . On obtient ainsi pour le coefficient d'amplitude :

$$(63) \quad I(t) \underset{t \downarrow T_*}{\propto} \int_{T_*=1}^t (t-t_*)^{1/2} P\left(-\frac{1}{t_*}\right) dt_*.$$

Poursuivant avec, pour la distribution  $P$ , la loi de puissance (57), on obtient le comportement critique ( $t \downarrow T_*$ ) du spectre aux très grands nombres d'onde (EUV) :

$$(64) \quad E_{EUV}(t, k) \underset{k \rightarrow \infty}{\propto} (t-T_*)^{\alpha+3/2} k^{-2}.$$

Ce résultat peut aussi être obtenu en utilisant, comme au paragraphe précédent, un modèle pour la statistique des minima locaux du gradient initial. On peut de même aussi évaluer le spectre  $E_{UV}(t, k)$  aux nombres d'onde modérément grands. Nous nous contentons ici d'un simple argument de continuité, qui permet d'affirmer qu'à un instant  $t$  voisin de  $T_*$  (après comme avant), et aux nombres d'onde modérément grands,  $E_{UV}(t, k)$  doit suivre la loi en  $k^{-3-2\alpha/3}$  obtenue à l'instant  $T_*$ . La transition entre les régimes UV et EUV s'opère à un nombre d'onde  $K_2(t)$ , qui s'obtient en écrivant que  $E_{UV}$  et  $E_{EUV}$  sont du même ordre, ce qui donne :

$$(65) \quad K_2(t) \underset{t \downarrow T_*}{\propto} (t-T_*)^{-3/2}.$$

Peu après l'instant d'accumulation des préchocs  $T_*$ , dans le problème statistique, le spectre d'énergie aux grands nombres d'onde est donc constitué de deux parties. Aux nombres d'onde modérément grands, le comportement  $k^{-3-2\alpha/3}$  de l'instant  $T_*$  subsiste; au-delà d'un nombre d'onde de transition  $K_2(t)$  apparaît un régime en  $k^{-2}$  (fig. 10). Une conséquence est que l'enstrophie moyenne est infinie dès après  $T_*$ . Quand le temps croît (voir fig. 10), le nombre d'onde de transition  $K_2(t)$  diminue et le spectre de l'instant  $T_*$  disparaît progressivement, au profit du régime inertiel universel, qui s'établit donc par une remontée infrarouge.

Il est intéressant également de calculer le comportement asymptotique ( $k \rightarrow \infty$ ) du spectre  $E_f(t, k)$  de la représentation formelle. Celui-ci est facilement obtenu par développement au plus bas ordre d'intégrale oscillante. Partant de la troisième représentation F-L du spectre (51), (52), avec pour tout temps  $\xi = tu_0(h)$ , on obtient, en développant la phase au voisinage de l'origine,

$$(66) \quad E_f(t, k) \underset{k \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{2\pi} t^{-2} k^{-2} \int_{\mathbb{R}} dh \exp(-ikh) \langle \exp[-ikh w(0)] \rangle.$$

On voit apparaître la fonction caractéristique du gradient initial, dont la transformée de Fourier inverse est la distribution de probabilité  $P$ ; l'expression asymptotique (66) peut donc aussi s'écrire :

$$(67) \quad E_f(t, k) \underset{k \rightarrow \infty}{\simeq} t^{-3} P(-1/t) k^{-3}.$$

Avec l'hypothèse de gradient initial borné, le coefficient numérique  $P(-1/t)$  dans (67) est nul pour  $t < T_* = 1$ . Pendant cette période, la représentation formelle est exacte. Le résultat (67) révèle donc seulement l'inconsistance pour  $t < T_*$  du développement de plus bas ordre effectué ci-dessus, et montre la nécessité du développement cubique effectué plus haut (voir aussi l'annexe B).

Après  $T_*$ , le calcul ci-dessus est constant, et donne le comportement en  $k^{-3}$  du spectre formel. Terminant le calcul, pour  $t \downarrow T_*$ , avec la loi de puissance (57), on obtient :

$$(68) \quad E_f(t, k) \underset{\substack{t \downarrow T_* \\ k \rightarrow \infty}}{\propto} (t - T_*)^\alpha k^{-3}.$$

Dans la représentation formelle, on « oublie » qu'une fraction finie des réalisations a dépassé son instant de singularité; on traite ainsi en fait la statistique de la « solution formelle » (voir § 2.1 d et l'annexe A), dont les amplitudes de Fourier individuelles sont en  $k^{-3/2}$ , et donc le spectre en  $k^{-3}$ ; la prise de moyenne ne change pas l'exposant de cette loi de puissance, inexacte mais universelle.

### 3.4. CONDITIONS INITIALES GAUSSIENNES

En Mécanique Statistique en général et en théorie statistique de la turbulence en particulier, on a souvent utilisé les processus gaussiens, soit comme condition initiale (ou comme statistique d'un terme source), soit comme première description d'un éventuel état statistiquement stationnaire. L'hypothèse gaussienne est commode techniquement car on dispose de formules exactes, qui permettent le calcul explicite des moments, à l'aide de fonctionnelles génératrices par exemple. Une simplification particulière vient de ce que, si la valeur moyenne est nulle, tous les moments s'expriment en fonction de la corrélation à deux points. Ces circonstances sont à la base des méthodes d'approximation dans lesquelles on calcule au voisinage d'une situation gaussienne. On peut, par exemple avec des diagrammes, moyennner terme à terme dans un calcul de perturbation en puissance du

temps [42], ou d'un nombre de Reynolds (ce dernier pouvant être le nombre de Reynolds du problème primitif ou un nombre de Reynolds renormalisé ([36], [43], [12])). Dans certains cas enfin, on peut, comme on va le voir, resommer complètement les séries ainsi obtenues.

En fait le rôle ainsi dévolu à la distribution gaussienne est un peu artificiel. En turbulence développée, cette description est mise en défaut, ne serait-ce que par les effets de l'intermittence à petite échelle [44]. Adler et Firman [45] ont, pour des raisons similaires, contesté son utilisation pour la modélisation aléatoire des surfaces rugueuses, un problème dont la connection avec le modèle de Burgers est détaillée dans l'annexe A. Dans la suite nous montrons que pour l'équation de Burgers statistique, le choix de conditions initiales gaussiennes apparaît même à certains égards particulièrement pathologique.

Commençons par montrer que l'équation de Burgers avec conditions initiales gaussiennes se prête remarquablement à des manipulations formelles. Supposons, « naïvement », que l'on puisse, pour des temps suffisamment courts, travailler comme en phase régulière, en utilisant pour le spectre d'énergie  $E(t, k)$  la représentation F-L intégrale (51) où l'intégrant  $\mathcal{E}$  est donné par l'expression (52), avec  $\xi = tu_0(h)$ . Avec une condition initiale  $u_0$  homogène, gaussienne, pour  $k$  et  $t$  fixés, le processus  $\varphi = kt[u_0(h) - u_0(0)]$  est gaussien, de valeur moyenne nulle. La formule  $\langle \exp(-i\varphi) \rangle = \exp[-(1/2)\langle \varphi^2 \rangle]$  s'applique alors; à partir de (51), (52), on obtient ainsi une représentation complètement explicite du spectre à l'instant  $t$ , en fonction de la seule corrélation initiale  $\Gamma_0(h)$ , supposée s'annuler à l'infini :

$$(69) \quad E(t, k) = \frac{1}{2\pi} t^{-2} k^{-2} \int_{\mathbb{R}} dh e^{-ikh} \{ e^{-k^2 t^2 [\Gamma_0(0) - \Gamma_0(h)]} - e^{-k^2 t^2 \Gamma_0(0)} \}.$$

Toujours dans une optique formelle, on peut essayer de déterminer la solution en utilisant des développements de Taylor à tous les ordres en temps pour chaque réalisation du champ de vitesse. Une possibilité est d'utiliser à  $t=0$  la relation de récurrence :

$$(70) \quad \frac{\partial^n u(t, x)}{\partial t^n} = (-1)^n \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left[ u^n \frac{\partial u}{\partial x} \right],$$

résultant immédiatement de l'équation de Burgers inviscide. Il est plus commode de partir de la série équivalente (27) obtenue après transformée de Fourier spatiale; on en déduit le développement du produit  $u(t, k) u(t, k')$ . On moyenne alors terme à terme sur la donnée initiale. L'homogénéité fait apparaître dans chaque terme un facteur  $\delta(k+k')$ ; la statistique gaussienne fait que seuls subsistent les termes d'ordre pair ( $2p$ ), qui sont la transformée de Fourier de combinaisons linéaires de moments du type  $\langle [u_0(a)]^{n+1} [u_0(a+h)]^{m+1} \rangle$ , avec  $n+m+2=2(p+1)$ ; après décompte — effectué par analyse combinatoire, directe ou sur des diagrammes — et regroupement, le terme général (coefficient de Taylor temporel d'ordre  $2p$  du spectre) s'écrit à l'aide de la corrélation à deux points initiale  $\Gamma_0(h)$  sous la forme :

$$(71) \quad \delta(k+k') (-ik)^{2p} \frac{[\Gamma_0(0)]^{p+1}}{(p+1)!} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dh e^{-ikh} \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{\Gamma_0(h)}{\Gamma_0(0)} \right]^{p+1} \right\}.$$

L'obtention d'une expression compacte pour ce coefficient est *a priori* surprenante, étant donné la prolifération très rapide des termes dans ce type de problèmes non linéaires (voir la référence [44]). Nous reviendrons sur ce point.

A nombre d'onde  $k$  fixé, si  $\Gamma_0(h)$  décroît assez vite à l'infini, la série de Taylor dont les coefficients sont donnés par (71) est convergente pour tout  $t$ . Sa somme se calcule explicitement et redonne après quelques manipulations l'expression (69) qui avait été obtenue par un procédé plus direct. L'existence d'un tel procédé direct est en fait l'explication du phénomène de non-prolifération des termes noté ci-dessus. Mentionnons enfin qu'une autre méthode de resommation à tous les ordres, formelle également, a pu être mise en œuvre par Kahng [25], au moins pour le comportement à grand nombre d'onde; cette méthode est basée sur un développement de Wiener-Hermite.

Le comportement asymptotique aux grands nombres d'onde du spectre formel (69) s'obtient aisément. La corrélation  $\Gamma_0(h)$  est une fonction paire qui atteint sa plus grande valeur à l'origine; sa dérivée seconde à l'origine est liée à l'entrophie moyenne initiale  $\Omega_0$  par :

$$(72) \quad \left. \frac{d^2 \Gamma_0(h)}{dh^2} \right|_{h=0} = -\Omega_0:$$

par application de la méthode du col à (69), on obtient donc pour tout temps :

$$(73) \quad E(t, k) \underset{k \rightarrow \infty}{\simeq} (2\pi)^{-1/2} \Omega_0^{-1/2} t^{-3} \exp[-1/(2\Omega_0 t^2)] k^{-3}.$$

On retrouve bien le comportement en  $k^{-3}$  du spectre formel, obtenu plus haut par développement asymptotique pour une loi de probabilité quelconque (67). On voit sur l'expression (73) que la loi gaussienne introduit une singularité essentielle en temps à  $t=0$ .

En fait tous les calculs ci-dessus sont illégitimes, ou plutôt définissent ce que nous avons appelé précédemment la représentation formelle. Avec des conditions initiales gaussiennes, le gradient initial n'est pas uniformément borné sur l'ensemble des réalisations. En conséquence, au bout d'un temps  $t$  positif quelconque, une fraction finie des réalisations est dans la phase singulière, de sorte que le problème statistique n'a aucune phase régulière. Même avec resommation complète, un calcul perturbatif est inadapté à ce problème, singulier à l'instant initial.

Bien entendu la même critique peut être adressée au procédé de resommation mis en œuvre par Kahng. Meecham et Thébaud ont noté [26] que le procédé de Kahng revient à étudier la « solution alternée ». Comme nous le montrons dans l'annexe A, celle-ci n'est autre que notre « solution formelle », qui n'est en fait pas solution de l'équation de Burgers. Le comportement réel du modèle de Burgers échappe donc à ces divers procédés de resommation.

Pour un calcul correct dans le cas gaussien, il nous faut pour tout  $t > 0$  nous placer en phase dissipative. On sait que les chocs produisent alors un régime inertiel avec spectre en  $k^{-2}$ . Grâce au travail de Kida [18], le coefficient de  $k^{-2}$  est connu aux temps longs (voir aussi à ce sujet le chapitre 4). Nous allons maintenant en donner une expression asymptotique aux temps courts. Pour cela nous utilisons la longueur lagrangienne

moyenne  $I(t)$  d'un choc contenant l'origine. L'analyse effectuée au paragraphe 3.3 pour la limite  $t \downarrow T_*$  peut être réutilisée; avec une distribution gaussienne du champ initial, donc également du gradient initial, (63) devient :

$$(74) \quad I(t) \underset{t \downarrow 0}{\propto} \int_0^t dz (t-z)^{1/2} \exp[-F/z^2].$$

Après le changement de variable  $z = t/(u+1)$ , cette intégrale s'écrit :

$$(75) \quad I(t) \underset{t \downarrow 0}{\propto} t^{3/2} \int_0^\infty du \frac{u^{1/2}}{(u+1)^{5/2}} \exp\left[-F \frac{(1+u)^2}{t^2}\right];$$

par méthode de Laplace on obtient alors le comportement asymptotique :

$$(76) \quad I(t) \underset{t \downarrow 0}{\propto} t^{3/2} (1/t^2)^{-3/2} \exp(-F/t^2).$$

Il en résulte pour le spectre aux premiers instants de la phase dissipative suivant un état initial gaussien, l'expression asymptotique aux grands nombres d'onde :

$$(77) \quad E(t, k) \underset{\substack{t \downarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}}{\propto} t^{9/2} \exp(-F/t^2) k^{-2}.$$

On voit que cette expression présente une singularité essentielle en temps à  $t=0$ , qui est le reflet de la fraction finie (mais exponentiellement petite) des réalisations ayant produit des chocs aux temps courts. Il est vraisemblable que cette singularité est également présente dans le spectre  $E(t, k)$ , non asymptotisé en  $k$ . Le développement de Taylor d'une fonction en  $\exp(-1/t^2)$  étant identiquement nul, la phase dissipative échappe à tout calcul perturbatif en  $t$ .

Une étude analogue s'applique à la dissipation moyenne d'énergie  $\varepsilon(t)$ , dont on montre que pour des temps courts, elle se comporte selon la loi :

$$(78) \quad \varepsilon(t) \underset{t \downarrow 0}{\propto} t^{15/2} \exp(-F/t^2).$$

#### 4. Un exemple d'utilisation de la solution de Hopf-Cole dans le cas aléatoire : la méthode de Kida revisitée

La méthode Fourier-Lagrangienne en phase dissipative n'est d'une mise en œuvre commode que dans les situations où les chocs sont d'une part peu nombreux, donc à peu près indépendants, et d'autre part faibles, donc susceptibles d'une analyse locale du type catastrophe. La méthode Fourier-Lagrangienne semble donc peu adaptée à l'étude des

temps longs. La méthode de Hopf [16] et Cole [17], dont on rappelle l'essentiel dans le paragraphe 4.1, établit peu le contact avec l'espace de Fourier, mais a un caractère géométrique beaucoup plus global. Elle est de ce fait très bien adaptée à l'étude de questions comme le comportement statistique aux temps longs, question abordée par Burgers lui-même [6], Tatsumi et Kida [46], et surtout Kida [18], qui a apporté une solution que l'on peut qualifier de définitive. Kida établit entre autres la loi de décroissance de l'énergie, en passant par la loi de distribution des amplitudes des chocs; en fait il est possible d'arriver de façon plus directe à cette loi de décroissance, en utilisant d'une part un potentiel des vitesses  $\psi$  (comme cela a été brièvement indiqué par l'un d'entre nous dans un appendice de l'article de Kida), et d'autre part une technique de franchissement. C'est cette méthode que nous exposons au paragraphe 4.2.

#### 4.1. LA SOLUTION DE HOPF-COLE ET LA LIMITE INVISCIDE

Comme l'ont remarqué Hopf [16] et Cole [17] (voir aussi les références [6] et [10]), la transformation non linéaire :

$$(79 a) \quad u(t, x) = - \frac{\partial}{\partial x} \psi(t, x),$$

$$(79 b) \quad \psi(t, x) = 2\nu \text{Log } \theta(t, x),$$

permet de ramener l'équation de Burgers (1) à viscosité positive à l'équation de la chaleur. On peut en effet toujours imposer au potentiel  $\psi(t, x)$  du champ de vitesse une jauge telle que  $\psi$  vérifie l'équation :

$$(80) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

équivalente sous la transformation (79 b) à :

$$(81) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

Cette dernière équation se résout de manière standard; notons  $\psi_0$  le potentiel initial, pour tout  $t > 0$ , la solution :

$$(82) \quad \begin{cases} \theta(t, x) = (4\pi\nu t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} dy \exp \left[ -\frac{1}{2\nu} F_x(y) \right], \\ F_x(y) = \frac{(x-y)^2}{2t} - \psi_0(y), \end{cases}$$

est réelle positive et régulière; le champ de vitesse s'en déduit par dérivée logarithmique et est donc régulier. Notons que dans le domaine (spatial) complexe,  $\theta(t, x)$  est susceptible de s'annuler; les singularités correspondantes du champ de vitesse fournissent une explication de l'intermittence à haute fréquence [47].

La limite inviscide ( $\nu \downarrow 0$ ) peut être étudiée en effectuant un développement asymptotique de (82). On évalue pour cela l'intégrale par la méthode de Laplace; la contribution essentielle, dans la limite  $\nu \downarrow 0$  et pour  $x$  et  $t$  fixés, vient des régions où  $F_x(y)$  passe par un minimum. Soit  $y_0$  un tel point, on obtient :

$$(83) \quad \psi(t, x) \underset{\nu \downarrow 0}{\simeq} 2\nu \operatorname{Log} \left[ C \exp \left[ - \frac{F_x(y_0)}{2\nu} \right] \right],$$

où  $C$  est une quantité réelle positive indépendante de la viscosité (*voir* pour plus de détails les références [16], [6], [46]). Reportant la définition (82) de  $F_x(y)$ , on a finalement :

$$(84) \quad \psi(t, x) \underset{\nu \downarrow 0}{\simeq} \sup_y \left[ \psi_0(y) - \frac{(y-x)^2}{2t} \right],$$

ce qui fournit une représentation explicite du potentiel du champ de vitesse à l'instant  $t$ , dans la limite inviscide, en fonction du potentiel initial.

Une formule équivalente à (84) :

$$(85) \quad \psi(t, x) \underset{\nu \downarrow 0}{\simeq} \operatorname{Inf} \left\{ A : \frac{(y-x)^2}{2t} + A \geq \psi_0(y), \forall y \right\},$$

suggère une interprétation géométrique (*fig. 11*), qui permet d'établir commodément les propriétés du champ de vitesse dans la limite  $\nu \downarrow 0$ , avant et après le temps de première singularité. C'est ce que nous rappelons brièvement ici, ayant surtout en vue l'utilisation de cette construction dans le cas statistique (§ 4.2). Dans un repère où  $\psi_0$  est tracée en fonction de  $y$ , on considère la parabole dont l'axe de symétrie, vertical, a pour abscisse  $x$  et le minimum a pour ordonnée  $A$ ; en faisant décroître  $A$ , on atteint la borne inférieure  $\psi(t, x)$  (85) lorsqu'a lieu le premier contact de la parabole avec la courbe  $\psi_0(y)$ . Aux temps courts, la parabole a une forte courbure; le contact ne se produit génériquement qu'en un point  $a(x)$  et est simple. L'égalité des fonctions et des tangentes aux deux courbes en ce point s'écrit :

$$(86) \quad \psi(t, x) + \frac{[a(x) - x]^2}{2t} = \psi_0[a(x)],$$

$$(87) \quad \frac{a(x) - x}{t} = \psi_0'[a(x)];$$

en dérivant (86) par rapport à  $x$ , et en utilisant la définition (79 a) du potentiel de la vitesse, on obtient :

$$(88) \quad u(t, x) = \frac{x - a(x)}{t} = u_0(a);$$

le point  $a(x)$  est donc le point d'où est issue la particule située en  $x$  à l'instant  $t$ , et cette particule a conservé sa vitesse initiale; c'est la solution (2) inviscide dans la phase régulière. Quand il se produit un contact double, on a égalité des dérivées secondes en  $a(x)$ , soit :

$$(89) \quad \frac{1}{t} = \psi_0''[a(x)] = -u_0''[a(x)];$$

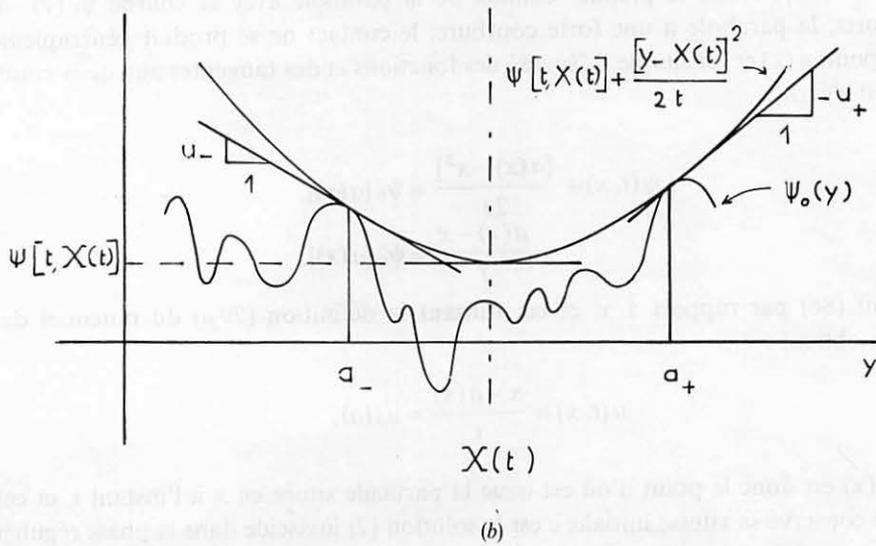
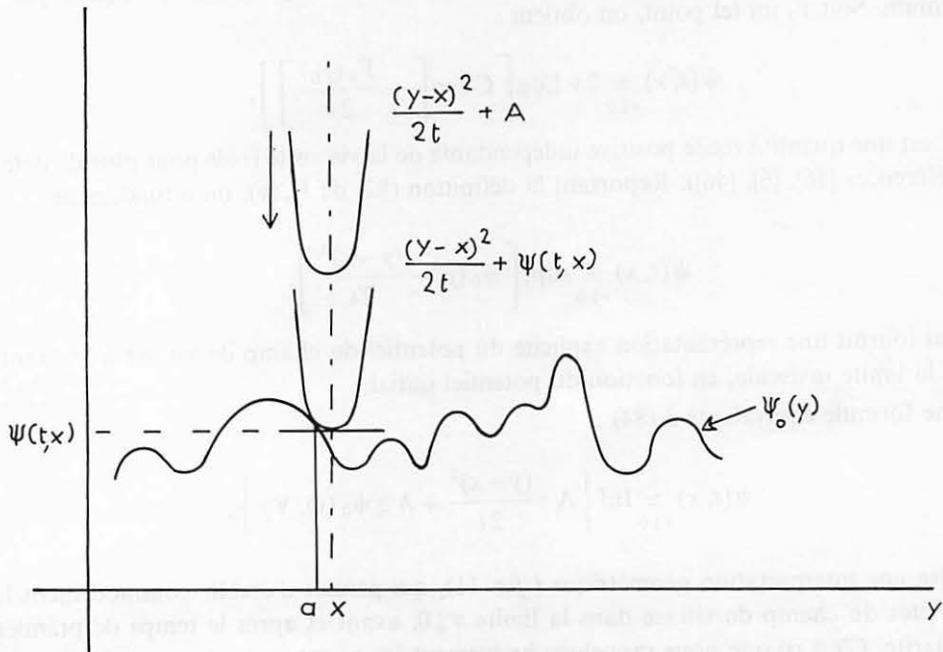


Fig. 11

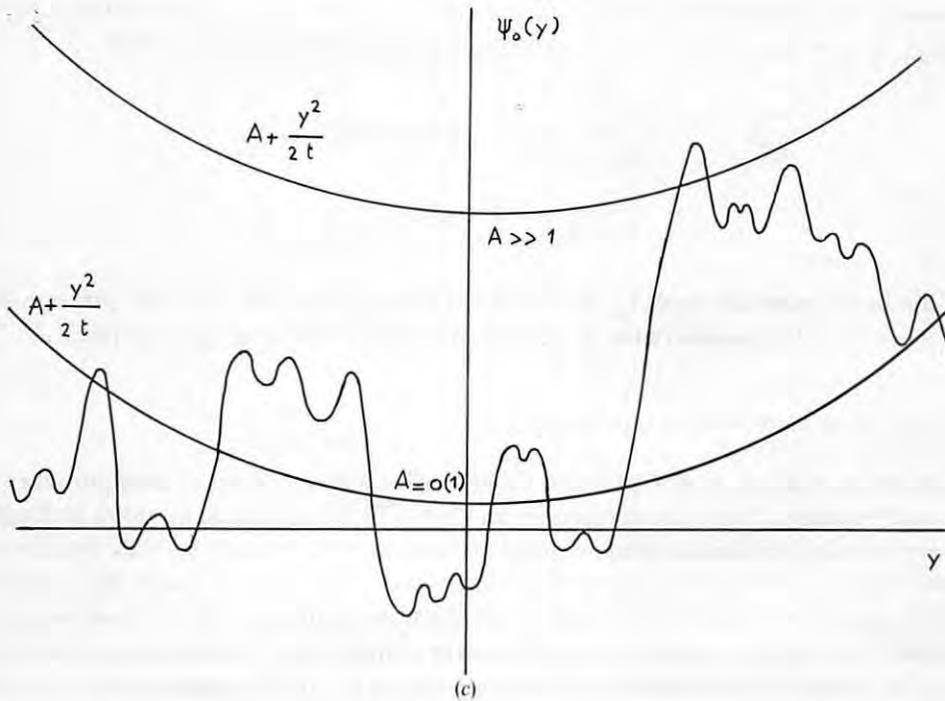


Fig. 11. — Construction géométrique de la solution de Hopf-Cole de l'équation de Burgers dans la limite inviscide (§ 4.1 et 4.2). Le potentiel  $\psi(t, x)$  de la vitesse est l'ordonnée du sommet de la parabole de rayon de courbure  $t$  et d'axe vertical passant par  $(x, 0)$ , pour laquelle se produit pour la première fois un contact avec la courbe  $\psi_0$  du potentiel initial. Avant  $t_*$  (fig. 11 a) ce contact est unique; après  $t_*$  (fig. 11 b) il peut être double; le potentiel est défini et continu, mais sa dérivée à gauche,  $-u_-$  ( $u_-$  = vitesse avant le choc), diffère de sa dérivée à droite,  $-u_+$  ( $u_+$  = vitesse après le choc). Dans le cas aléatoire homogène, le potentiel moyen  $\langle \psi(t, 0) \rangle$  est déterminé [(95) et (100)] par la probabilité de franchissement de la parabole déterministe ( $A + \gamma^2/2t$ ) par le potentiel initial  $\psi_0$ , processus aléatoire stationnaire. Aux temps longs (fig. 11 c), la parabole est très plate, et le franchissement est déterminé essentiellement par l'ordonnée à l'origine  $A$  (voir Annexe C).

Fig. 11. — Geometric representation of the Hopf-Cole solution of Burgers' equation in the inviscid limit (§ 4.1 and 4.2). The descending parabola has radius of curvature  $t$  and vertical axis with abscissa  $x$ ; at the first contact with the graph of the initial potential  $\psi_0$ , the altitude of the minimum of the parabola gives the velocity potential  $\psi(t, x)$ . Before  $t_*$  (Fig. 11 a) there is a unique contact; after  $t_*$  (Fig. 11 b) a double contact may occur; the potential is then well defined and continuous, but has a left-derivative,  $-u_-$  ( $u_-$  = velocity beyond the shock), which differs from the right-derivative,  $-u_+$  ( $u_+$  = velocity in front of the shock). In the random homogeneous case, the mean potential  $\langle \psi(t, 0) \rangle$  is governed [(95) and (100)] by the crossing probability of the deterministic parabola ( $A + \gamma^2/2t$ ) and the initial potential  $\psi_0$ ; the latter being a random stationary process. For large times (Fig. 11 c), the parabola is very flat, and the crossing is essentially governed by the altitude of the minimum  $A$  (see appendix C).

le premier instant où cela se produit est donc l'instant  $t_*$  de première singularité (précho) défini au paragraphe 2.1. Après  $t_*$  on a, pour certaines abscisses  $X(t)$ , deux contacts en deux points distincts  $a_-$  et  $a_+$  (fig. 11 b); pour  $x$  voisin de  $X(t)$ , le contact est unique et :

$$(90) \quad a(x) \underset{x \uparrow X(t)}{\rightarrow} a_-; \quad a(x) \underset{x \downarrow X(t)}{\rightarrow} a_+;$$

le potentiel  $\psi$  reste défini et continu, mais sa dérivée à droite  $\psi'_0(a_+)$  et sa dérivée à gauche  $\psi'_0(a_-)$ , ne sont pas identiques; il y a discontinuité du champ de vitesse avec :

$$(91) \quad \begin{cases} \lim_{x \uparrow X(t)} u(t, x) = u_0(a_-) = u_-, \\ \lim_{x \downarrow X(t)} u(t, x) = u_0(a_+) = u_+. \end{cases}$$

Cette limite inviscide, après  $t_*$ , de la solution du problème avec viscosité, présente donc des chocs; c'est la solution faible de l'équation inviscide étudiée au paragraphe 2.2.

#### 4.2. LA LOI DE DÉCROISSANCE DE L'ÉNERGIE

Dès lors que des chocs sont présents, l'énergie n'est plus conservée et asymptotiquement elle tend vers zéro. Nous considérons ici un champ de vitesse initial aléatoire homogène, et nous nous intéressons au comportement de l'énergie moyenne par unité de longueur, en particulier à sa loi de décroissance aux temps longs (limite  $t \rightarrow \infty$ ) pour des conditions initiales gaussiennes (il est entendu qu'on a d'abord pris la limite  $v \downarrow 0$ ). Nous exposons une méthode nouvelle pour établir ce comportement asymptotique, méthode bien adaptée au cas où le champ de vitesse initial dérive d'un potentiel  $\psi_0$  lui-même homogène (hypothèse H 1); ce processus  $\psi_0$  est supposé gaussien (H 2) et vérifiant une propriété de mélange (H 3). On peut alors en particulier définir  $E_\psi(k)$ , « spectre d'énergie » du potentiel initial, qui est lié à celui de la vitesse initiale par :

$$(92) \quad E(t=0, k) = k^2 E_\psi(k).$$

Ces hypothèses faites sur le potentiel imposent donc une restriction sur le comportement infrarouge de la donnée initiale, qui doit vérifier :

$$(93) \quad \lim_{k \downarrow 0} \frac{E(t=0, k)}{k^2} < +\infty.$$

Nous établissons d'abord un théorème valable pour tout temps pour une donnée initiale homogène. Soit  $\psi(t, x)$  le potentiel choisi dans la jauge (80) et  $\psi_0$  le potentiel initial  $\psi(t=0, x)$ ; on a alors, pour toute viscosité positive :

$$(94) \quad (1) \quad E(t) \equiv \frac{1}{2} \langle u^2 \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t, 0) \rangle,$$

et, dans la limite de viscosité nulle :

$$(95) \quad (2) \quad \langle \psi(t, 0) \rangle \underset{v \downarrow 0}{=} \int_0^\infty [1 - Q(t, A) - Q(t, -A)] dA,$$

où :

$$(96) \quad Q(t, A) = \Pr \left\{ \psi_0(y) - \frac{y^2}{2t} \leq A, \forall y \right\}.$$

L'intérêt de ce théorème est qu'il ne nécessite pas l'évaluation préalable du spectre d'énergie, mais donne directement une expression de l'énergie moyenne par unité de longueur. Pour démontrer la partie (1) du théorème, il suffit de moyenner l'équation (80), satisfaite par  $\psi$ , sur l'ensemble des réalisations, en utilisant l'homogénéité du champ de vitesse  $u(t, x) = -(\partial/\partial x)\psi(t, x)$ . Notons que le potentiel  $\psi$  lui-même n'est pas nécessairement un processus homogène. Pour démontrer la partie (2), définissons d'abord  $Q(t, A)$  comme la probabilité cumulée du potentiel  $\psi(t, x)$  à l'origine :

$$(97) \quad Q(t, A) \equiv \Pr \{ \psi(t, 0) \leq A \}.$$

On a alors évidemment :

$$(98) \quad Q(t, -\infty) = 0, \quad Q(t, +\infty) = 1,$$

et la valeur moyenne du potentiel s'écrit, à l'aide de la distribution de probabilité  $\partial Q/\partial A$  :

$$(99) \quad \langle \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} A \frac{\partial Q}{\partial A} dA.$$

En séparant l'intervalle d'intégration en deux parties  $[-\infty, 0]$  et  $[0, +\infty]$ , et en intégrant par parties, on obtient l'expression figurant dans le second membre de (95). L'équivalence des deux définitions de  $Q$  dans la limite inviscide résulte immédiatement de l'expression explicite du potentiel  $\psi$  obtenue dans cette limite [formule (84) avec  $x=0$ ]. On peut encore exprimer  $Q$  en termes de probabilité de croisement de deux courbes, l'une étant le processus aléatoire  $\psi_0(y)$  et l'autre une parabole déterministe; on peut relire la figure 11 b dans cette perspective, dans laquelle  $Q(t, A)$  est défini par :

$$(100) \quad Q(t, A) = \Pr \left\{ \psi_0(y) \text{ ne franchit jamais } \frac{y^2}{2t} + A \right\},$$

équivalent à (96).

Nous faisons dans la suite les hypothèses (H 1) et (H 3) sur le potentiel initial. Évaluons dans ces conditions  $Q(t, A)$  aux temps longs. La parabole  $A + (y^2/2t)$  est alors très peu courbe; si  $A = O(1)$  la parabole reste dans un large domaine spatial à des ordonnées  $O(1)$  et il y a de ce fait un grand nombre de franchissements; en conséquence (fig. 11 c)  $Q(t, A)$ , probabilité de non-franchissement, est faible. Si par contre  $A$  est grand, les franchissements deviennent (spatialement) rares, donc en général bien séparés, et par conséquent approximativement indépendants. Il en résulte que le nombre total de franchissements vers le haut,  $N_{\uparrow}(t, A)$ , suit asymptotiquement une loi de Poisson; la probabilité de non-franchissement est alors donnée (asymptotiquement) par :

$$(101) \quad Q(t, A) = \Pr \{ N_{\uparrow}(t, A) = 0 \} \underset{A \rightarrow \infty}{\simeq} \exp[-\langle N_{\uparrow}(t, A) \rangle].$$

La valeur moyenne  $\langle N_{\uparrow}(t, A) \rangle$  du nombre de franchissements de la parabole se calcule en appliquant essentiellement la méthode de Rice (voir la référence [48] et l'annexe C). On a :

$$(102) \quad N_{\uparrow}(t, A) = 2 \int_0^{+\infty} dy \delta[m(y) - A] m'(y) Y[m'(y)],$$

où l'on a posé  $m(y) = \psi_0(y) - (y^2/2t)$ ;  $m'(y) = (dm/dy) = (d\psi_0/dy) - (y/t)$ ; et où  $Y$  est la fonction échelon de Heaviside qui sélectionne les situations de franchissement vers le haut. Introduisant  $P(\psi_0, \psi'_0; y)$ , distribution de probabilité jointe de  $\psi_0$  et de sa dérivée  $(d\psi_0/dy) = \psi'_0$ , on obtient la valeur moyenne de  $N_\uparrow(t, A)$  :

$$(103) \quad \langle N_\uparrow(t, A) \rangle = 2 \int_0^\infty dy \int_{y/t}^\infty d\psi'_0 \left( \psi'_0 - \frac{y}{t} \right) P\left( \frac{y^2}{2t} + A, \psi'_0; y \right).$$

Avec l'hypothèse d'homogénéité, la distribution  $P(\psi_0, \psi'_0; y)$  est indépendante de  $y$ , et se factorise en  $P_a(\psi_0) P_b(\psi'_0)$ . D'autre part, au moins dans l'hypothèse gaussienne, on peut, dans la limite des temps longs et des grandes excursions ( $A \rightarrow \infty$ ), négliger  $(y^*/t)$  devant  $\psi'_0(y^*)$  où  $y^*$  est un point de franchissement. On en déduit l'expression asymptotique :

$$(104) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle N_\uparrow(t, A) \rangle \underset{\substack{t \rightarrow \infty \\ A \rightarrow \infty}}{\simeq} 2 \int_0^\infty dy P_a\left(\frac{y^2}{2t} + A\right) \int_0^\infty d\psi' \psi' P_b(\psi') \\ \propto \underset{\substack{t \rightarrow \infty \\ A \rightarrow \infty}}{t^{1/2}} \int_0^\infty d\eta P_a(\eta^2 + A). \end{array} \right.$$

A ce point, la partie statistique du calcul est terminée. Il reste à évaluer le comportement asymptotique ( $A \rightarrow \infty$ ) de l'intégrale figurant dans (104), comportement régi par celui de la distribution de probabilité du potentiel initial; on peut alors, avec (101), déduire le comportement asymptotique ( $t \rightarrow \infty$ ) cherché de l'intégrale (95) qui donne  $\langle \psi(t, 0) \rangle$ .

Pour illustrer, terminons le calcul dans le cas d'une distribution gaussienne du potentiel initial (hypothèse H2). On a alors  $P_a(\psi) \propto \exp(-\psi^2)$  (voir [18] pour l'étude d'autres comportements de  $P_a(\psi)$ ). La méthode de Laplace appliquée à l'intégrale qui figure dans (104) donne :

$$(105) \quad \langle N_\uparrow(t, A) \rangle \underset{\substack{t \rightarrow \infty \\ A \rightarrow \infty}}{\propto} t^{1/2} A^{-1/2} \exp(-A^2).$$

L'intégrand dans (95) est donc coupé au-delà de  $\tilde{A}$  tel que  $(1/\tilde{A}) t = \exp(2\tilde{A}^2)$ ; on en déduit le terme dominant de l'intégrale (2) :

$$(106) \quad \langle \psi(t, 0) \rangle \underset{t \rightarrow \infty}{\propto} [\text{Log } t]^{1/2};$$

bien entendu on suppose toujours que la limite  $v \downarrow 0$  a été prise préalablement. Appliquant le théorème établi plus haut (94), on obtient, par dérivation de (106), la loi de décroissance de l'énergie aux temps longs :

$$(107) \quad E(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\propto} t^{-1} [\text{Log } t]^{-1/2}.$$

(2) Une démonstration plus rigoureuse en a été donnée récemment par McLaughlin et coll. [49] dans le cas particulier où le potentiel  $\psi_0$  est le processus stationnaire de Uhlenbeck-Ornstein; on peut alors s'appuyer sur des propriétés fines du mouvement brownien (loi du logarithme itéré).

Il faut noter que ce résultat n'a rien d'universel; quand on change la statistique des conditions initiales, d'autres lois de décroissance sont en général obtenues (voir [18]).

Rappelons enfin que l'analyse ci-dessus a été menée en supposant le potentiel initial homogène; cette hypothèse n'est pas vérifiée si par exemple le spectre ne s'annule pas à  $k=0$  (93); sa valeur  $E(t, k=0)$  est alors un invariant supplémentaire, qui conduit comme l'a montré Burgers ([5], [6]) à la loi :

$$(108) \quad E(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\propto} t^{-2/3}.$$

## 5. Conclusion

Nous commençons (§ 5.1) par rassembler les principaux résultats exacts nouveaux obtenus dans cette étude de la limite inviscide de l'équation de Burgers; la plupart concerne des situations asymptotiques, dans le cas déterministe ou aléatoire. Au paragraphe 5.2, nous discutons les implications pour la théorie statistique de la turbulence.

### 5.1. SYNTHÈSE

Nous avons introduit une nouvelle représentation intégrale, dite Fourier-Lagrangienne (F-L), de la solution de l'équation de Burgers dans la limite de viscosité nulle; cette représentation repose sur la transformation  $a \rightsquigarrow X(t, a)$ , dans laquelle à  $a$ , coordonnée lagrangienne initiale d'une particule du fluide, on fait correspondre sa position eulérienne  $X(t, a)$  à l'instant  $t$ . Bien que cette transformation ne soit inversible que pendant la phase régulière, jusqu'à l'instant  $t_*$  au-delà duquel apparaissent des chocs (phase dissipative), la représentation F-L a pu être étendue pour tout temps, pour des conditions initiales déterministes ou aléatoires. Dans la phase régulière, la représentation F-L peut être mise sous une forme entièrement explicite, où la donnée initiale figure dans une exponentielle.

Dans le cas déterministe (chap. 2), nous avons effectué une analyse détaillée de la formation du premier choc et de sa généricité; par développement asymptotique de phase inflexionnelle ou stationnaire, la représentation F-L a permis d'en déduire le comportement ultraviolet de la solution. Le premier choc, discontinuité de la vitesse  $u$ , est précédé, à un instant  $t_*$ , d'une divergence du gradient  $w$ , ou préchoc. La nature du préchoc, génériquement en racine cubique, dépend du voisinage du minimum du gradient initial  $w_0$ ; elle détermine à son tour la loi de similitude de la transformée de Fourier aux grands nombres d'onde et aux instants  $t$  proches — antérieurs — de  $t_*$ . Cette loi, en  $k^{-4/3}$  dans le cas générique, est non universelle mais toujours plus raide que  $k^{-1}$ ; elle s'étend jusqu'aux nombres d'onde infinis à  $t_*$ . Cette singularité réelle du préchoc est elle-même précédée de singularités de l'extension (spatiale) complexe du champ de vitesse, au voisinage desquelles le champ est en racine carrée; à l'instant  $t_*$ , ces singularités coalescent sur l'axe réel avec leur complexe conjugué, donnant naissance au préchoc. Ces points de branchement se traduisent dans les amplitudes de Fourier par une zone à décroissance rapide, présente dans les très grands nombres d'onde ( $k > k_c$ ) aux instants  $t < t_*$ ; la coupure  $k_c$  est l'inverse de la largeur de la bande d'analyticité; cette zone comporte un préfacteur universel en  $k^{-3/2}$ . Elle est progressivement rejetée à l'infini. Après  $t_*$ , elle est

remplacée dans l'extrême ultraviolet par le régime inertiel universel en  $k^{-1}$  dû aux chocs; l'amplitude de chaque choc est déterminée par une loi de Maxwell; le nombre et l'amplitude des chocs augmentent, ce qui se traduit dans l'espace de Fourier par une remontée infrarouge de la zone en  $k^{-1}$ , qui gagne progressivement les nombres d'onde modérés. Si l'on travaille uniquement dans l'espace de Fourier, cette catastrophe de Riemann-Hugoniot peut passer inaperçue; en utilisant par exemple, à nombre d'onde fixé, un développement de Taylor en temps, dont le rayon de convergence est infini on peut en effet prolonger pour tout temps les expressions de la transformée de Fourier, *a priori* correctes seulement dans la phase régulière. La fonction ainsi obtenue a un comportement ultraviolet universel en  $k^{-3/2}$ , qui correspond à des singularités réelles en racine carrée. C'est en fait la transformée de Fourier d'une fonction que l'on peut construire par une sorte de déferlement de la distribution multivaluée des vitesses d'un gaz de particules libres, ayant pour distribution initiale le champ  $u_0$ . Dans le fluide de Burgers en revanche, le champ de vitesse devient singulier mais reste défini (univalué), grâce au « raidissement » opéré par le choc.

Dans le cas aléatoire la représentation F-L s'avère particulièrement utile (chap. 3); la représentation de Hopf-Cole, qui, dans la limite inviscide, implique une prise de « Sup » (voir § 4.1), est en effet alors d'un faible secours. Nous avons étudié le cas d'une condition initiale statistiquement homogène, de valeur moyenne nulle, et vérifiant une propriété de mélange.

Quand le gradient initial  $w_0$  est uniformément borné inférieurement ( $w_0 \geq -M$ ), on observe (§ 3.3) deux phases.

(i) Une phase régulière, durant laquelle le gradient reste borné, s'étend de l'instant initial jusqu'à l'instant  $T_* = M^{-1}$ . Le comportement de la solution dans la limite  $t \uparrow T_*$  dépend seulement du comportement de la distribution de probabilité  $P(w)$  du gradient initial près de la borne  $-M$ . Sous certaines hypothèses de régularité et de convergence, nous avons montré que, si ce comportement est en loi de puissance :

$$(109) \quad P(w) \underset{w \downarrow -M}{\propto} (w+M)^\alpha, \quad \alpha > -1,$$

alors l'enstrophie, proportionnelle à la valeur moyenne du carré du gradient, se comporte selon :

$$(110) \quad \Omega(t) \underset{t \uparrow T_*}{\propto} \begin{cases} \text{limite finie} & \text{pour } \alpha > 0, \\ \text{Log}(T_* - t)^{-1} & \text{pour } \alpha = 0, \\ (T_* - t)^\alpha & \text{pour } 0 > \alpha > -1; \end{cases}$$

quant au spectre d'énergie, il a, quand  $t \uparrow T_*$ , une limite finie qui, aux grands nombres d'onde suit une loi de puissance :

$$(111) \quad E(t, k) \underset{\substack{t \uparrow T_* \\ k \rightarrow \infty}}{\propto} k^{-3-2\alpha/3},$$

cette loi de puissance est toujours plus raide que la loi inertielle en  $k^{-2}$ .

(ii) Après  $T_*$ , il y a des chocs et l'enstrophie est infinie; c'est la phase dissipative. Dans la limite  $t \downarrow T_*$ , et sous les mêmes hypothèses, le spectre suit toujours la loi (111), jusqu'à

un nombre d'onde :

$$(112) \quad K_2(t) \underset{t \downarrow T_*}{\propto} (t - T_*)^{-3/2};$$

au-delà s'établit le régime inertiel :

$$(113) \quad E(t, k) \underset{t \downarrow T_*}{\underset{k \rightarrow \infty}{\propto}} (t - T_*)^{\alpha+3/2} k^{-2},$$

dont la loi de puissance est universelle et l'amplitude ne dépend que de  $\alpha$ .

Les expressions obtenues dans la phase régulière pour le spectre d'énergie par exemple, peuvent être étendues analytiquement pour tout temps, à nombre d'onde  $k$  fixé. Après  $T_*$  cette construction, dite représentation formelle  $E_f(t, k)$ , ne correspond pas à une solution de l'équation de Burgers; elle a un comportement ultraviolet en  $k^{-3}$ .

Des conditions initiales gaussiennes (§ 3.4) engendrent immédiatement, par évolution inviscide, des singularités; il n'y a donc pas de phase régulière. Le spectre formel  $E_f(t, k)$  a les mêmes propriétés que ci-dessus (rayon de convergence infini pour la série de Taylor en temps autour de  $t=0$ ; comportement ultraviolet en  $k^{-3}$ ); il peut être obtenu explicitement par des méthodes gaussiennes, globales ou de resommation. Le spectre exact, à grand nombre d'onde et aux temps courts, est donné par :

$$(114) \quad E(t, k) \underset{t \downarrow 0}{\underset{k \rightarrow \infty}{\propto}} t^{9/2} \exp(-F/t^2) k^{-2},$$

où l'amplitude exponentielle provient de la fraction des réalisations ayant déjà, à l'instant  $t$ , produit une singularité. On suppose qu'une telle singularité essentielle est présente dans le spectre exact non asymptotisé en nombre d'onde, rendant caduques les méthodes formelles mentionnées ci-dessus.

Enfin la dissipation qui se produit après  $T_*$ , que celui-ci soit nul ou positif, suggère l'étude du comportement de l'énergie aux temps longs (chap. 4). Celle-ci doit tendre vers zéro; on peut dès lors se demander selon quelle loi, et si cette loi est universelle. Nous avons ré-établi de manière compacte un résultat de Kida [18] pour un cas de conditions initiales gaussiennes (cas du potentiel initial statistiquement homogène); à l'aide de l'interprétation géométrique de la solution de Hopf-Cole, dont le caractère global est alors utile, et d'une technique de franchissement (*voir annexe C*), nous avons montré qu'on a :

$$(115) \quad E(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\propto} t^{-1} (\text{Log } t)^{-1/2}.$$

La comparaison avec d'autres résultats de Kida [18] et de Burgers [6] indique clairement la non-universalité de ce comportement.

## 5.2. BURGERLENCE/TURBULENCE

Plutôt que comme un modèle pour les mécanismes de la turbulence hydrodynamique, l'équation de Burgers apparaît aujourd'hui comme un utile banc d'essai des théories statistiques; nous développons ici dans cette perspective quelques remarques faites dans les chapitres précédents.

L'équation de Burgers a été introduite comme modèle de la turbulence hydrodynamique en 1939. Il est vrai que sa non-linéarité quadratique et le fait qu'elle engendre de l'excitation à petite échelle lui donnent une certaine ressemblance avec l'équation de Navier-Stokes. Toutefois elle en diffère par sa stabilité relativement à une perturbation des conditions initiales par exemple; elle ne produit pas de chaos intrinsèque, et peut même apparaître plutôt comme un générateur d'ordre; pour des temps longs en effet, la solution consiste en chocs, séparés par des domaines où elle est linéaire; la position et l'amplitude des chocs sont entièrement déterminés par la donnée initiale. Ce comportement ordonné, en dents de scie (*voir* [6]), est à opposer au chaos (d'origine intrinsèque ?) présenté par une turbulence Navier-Stokes, quelque « simple » que soit la condition initiale. De ce point de vue, l'équation de Burgers apparaît comme un modèle assez pauvre. L'introduction d'un terme déstabilisant, de type viscosité négative, peut toutefois produire des mécanismes générateurs de chaos. L'équation de Kuramoto [37], obtenue ainsi, conserve l'avantage, numérique en particulier, d'un système à une dimension d'espace; elle a été et est encore ([38], [50]) l'objet d'études variées concernant l'apparition et les lois d'échelle du chaos, et sa coexistence avec des structures à grande échelle. Quant à l'équation de Burgers elle-même, si l'excitation à petite échelle y est en un sens ordonnée, elle présente un trait commun avec les petites échelles spatiales ou temporelles d'un grand nombre de systèmes chaotiques, la turbulence hydrodynamique en particulier, à savoir la localisation intermittente de cette excitation. Dans la limite de viscosité nulle les chocs de l'équation de Burgers, où se produit la dissipation, forment en effet un ensemble de points, de mesure nulle et de dimension de Hausdorff nulle. Cette intermittence peut expliquer le fait que la zone inertielle ne vérifie pas la loi d'échelle en  $k^{-5/3}$ ; l'incompressibilité ne joue en effet pas de rôle dans l'argument de Kolmogorov ([11], [51], [24]), qui devrait donc s'appliquer à l'équation de Burgers aussi bien qu'à l'équation de Navier-Stokes. On admet généralement qu'il s'applique aussi mal à l'une qu'à l'autre, et dans l'hypothèse où la turbulence hydrodynamique présente réellement, au moins statistiquement, des comportements en lois de puissance universels, on rend l'intermittence responsable de l'écart entre les prédictions d'invariance d'échelle à la Kolmogorov et les mesures. Dans cette perspective, certains modèles ont été proposés pour calculer cette « correction d'exposant », que l'on relie à la dimension fractale  $D$  du support spatial de la dissipation; le  $\beta$ -modèle par exemple [52], suggère une correction  $B=(d-D)/3$  de l'exposant du spectre d'énergie;  $d$  désigne la dimensionnalité de l'espace. Il est intéressant de constater qu'appliquée à l'équation de Burgers, cette formulation conduit à la prédiction, bien établie par ailleurs [18], d'une loi inertielle universelle en  $k^{-2}$  <sup>(3)</sup>. L'équation de Burgers apparaît ainsi comme un test de la phénoménologie de la turbulence développée.

Dans le même esprit, nos résultats sur le comportement de l'équation de Burgers au voisinage de  $T_*$  peuvent être confrontés à certaines idées concernant le régime transitoire précédant l'apparition d'un régime inertiel développé. Ce régime transitoire a en effet été décrit à l'aide de temps caractéristiques dynamiques dont la dépendance d'échelle est établie dans une analyse à la Kolmogorov ([11], [52]); cette dernière avait en fait été introduite pour une solution stationnaire dans la limite  $v \downarrow 0$ ; ainsi étendue, elle peut

<sup>(3)</sup> Notons à ce propos que la présence de discontinuités dans un processus stochastique n'entraîne pas nécessairement un comportement en  $k^{-1}$  de l'amplitude de Fourier [53].

suggérer que le même processus de cascade ultraviolette, supposé gouverner le régime inertiel, est également à l'œuvre dans l'établissement de ce régime; dans cette perspective, la zone en loi d'échelle en  $k^{-5/3}$  (corrigé d'intermittence éventuellement) s'étendrait progressivement vers les grands nombres d'onde, de sorte que le spectre à l'instant  $T_*$  serait le spectre inertiel [54]. Les résultats du paragraphe 3.3 infirment ce schéma; le spectre à  $T_*$  est régi par l'accumulation de singularités d'un type différent de celles qui, ultérieurement, et par remontée infrarouge, conduisent au spectre inertiel. Ces résultats semblent se retrouver dans des simulations numériques tridimensionnelles de la turbulence Navier-Stokes, précisément du vortex de Taylor-Green à nombre de Reynolds voisin de 3000 ([55], [56]); on y a observé approximativement la séquence suivante pour le comportement ultraviolet du spectre d'énergie : d'abord décroissance rapide; puis, à l'instant où la dissipation est maximale, une loi de puissance  $k^{-n}$ , avec  $n$  compris entre 3 et 4, donc plus raide que la loi de Kolmogorov; enfin contamination progressive à partir des nombres d'onde les plus élevés par une loi  $k^{-m}$ ,  $m$  voisin de  $5/3$ . Brachet et coll. ont proposé plusieurs interprétations de ce phénomène, faisant intervenir en particulier des singularités complexes pendant la première phase, essentiellement inviscide, et des instabilités dissipatives ensuite. L'étude de ce régime transitoire, auquel Chorin s'est également attaqué [57] est donc particulièrement intéressante, mais il semble imprudent d'en tirer des conclusions pour le régime développé.

Quelques implications maintenant concernant les techniques statistiques. Alors que des singularités sont présentes, nous avons vu que les transformées de Fourier (spatiales) peuvent être analytiques (en temps) aussi bien dans le cas déterministe qu'aléatoire, et même être prolongées par des fonctions entières; ceci doit inciter à utiliser avec circonspection les calculs, spécialement perturbatifs, dans l'espace de Fourier, dans les problèmes où géométrie et singularités jouent un rôle important; il en est très probablement ainsi en turbulence hydrodynamique. On doit pourtant constater que, avec des procédures formelles de moyennes gaussiennes, de tels calculs constituent l'essentiel de l'arsenal de la théorie statistique de la turbulence, et définissent même son programme selon J. V. Neumann <sup>(4)</sup>.

Certes la mise en œuvre de tels calculs a été, et reste très utile pour des questions qualitatives simples, que ce soit sous la forme de simple analyse dimensionnelle ou sous celle plus élaborée de développements renormalisés (techniques de fermetures; groupe de renormalisation) ou de resommations de séries; mais leurs limites apparaissent en présence de phénomènes fortement non linéaires (voir par exemple [59]). A l'aide d'une équation différentielle non linéaire modèle, Frisch et Morf [47] ont déjà montré comment ces techniques sont inaptes à prédire l'intermittence de la zone dissipative; nous avons vu ici qu'elles ne prédisent pas non plus correctement les questions de comportement critique et leur universalité au voisinage de l'instant de singularité. Il apparaît crucial de repérer d'abord les structures non linéaires présentes, leur formation, leur généralité : points de branchement complexes, divergences du gradient ou discontinuité du champ dans l'équation de Burgers dans la limite inviscide; pôles complexes dans le cas visqueux [47];

<sup>(4)</sup> Voir [58]; à noter toutefois que dans ce même remarquable article de synthèse, J. V. Neumann appelait l'attention sur le possible rôle des singularités en turbulence, et sur l'utilité de la simulation numérique pour pallier à l'intuition insuffisante sur de tels problèmes.

dans les écoulements incompressibles on peut recenser nappes de tourbillon, ondes solitaires, structures cohérentes à grande échelle; et encore singularités complexes, etc. Après incorporation et étude déterministe de ces structures, éventuellement d'ailleurs par des procédés asymptotiques, on pourra prendre des moyennes; le cas échéant alors, mais alors seulement, ces moyennes pourront faire appel à un calcul perturbatif.

### Remerciements

Nous remercions R. H. Kraichnan, H. Rose et J. P. Guiraud pour leur intérêt pour ce travail et les remarques qu'ils ont faites sur des résultats préliminaires. Nous sommes redevables à P.-L. Sulem d'utiles discussions sur les extensions complexes.

Une partie de la matière de cet article a été exposée dans des enseignements de 3<sup>e</sup> Cycle (par U. Frisch à Harvard; par J.-D. Fournier à Lausanne); nous remercions les étudiants dont les notes nous ont été utiles (J. Knobloch, C. Henley, J. Sadik). Enfin l'un de nous (J.-D. Fournier) désire remercier la fondation Jeannin-France pour son inappréciable hospitalité.

## ANNEXE A

### Diverses constructions géométriques de la solution de l'équation de Burgers dans la limite inviscide

La solution implicite (2) de l'équation de Burgers inviscide peut être résolue graphiquement en construisant le réseau de courbes  $X(t, a) = a + tu_0(a)$ , position eulérienne à l'instant  $t$  fixé de la particule de coordonnée lagrangienne  $a$  (fig. 1). Comme expliqué au paragraphe 2.2, cette construction peut être généralisée à la phase dissipative : à l'aide d'une règle de Maxwell appliquée à la continuation analytique  $X_f(t, a)$  de la fonction  $X(t, a)$ , on construit la position eulérienne exacte  $X_e(t, a)$ , qui donne la position des chocs (fig. 5).

Une autre résolution graphique est proposée dans [10]. Étant donnée la courbe  $(\Gamma)$  obtenue en traçant la condition initiale  $u_0$  dans un repère  $(O\xi, O\eta)$ , on considère son intersection par une droite menée depuis le point  $(x, O)$ , et de pente  $(-1/t)$ ; c'est un point  $(a, u_0(a))$  dont l'abscisse est l'origine lagrangienne de  $x$ , et l'ordonnée la vitesse cherchée. Jusqu'à  $t_*$ , instant de première singularité, l'équation de Burgers est donc équivalente au problème de la première intersection d'une ligne de visée avec une surface donnée. Après  $t_*$ , il peut y avoir intersection multiple; pour définir la solution de l'équation de Burgers dans la limite inviscide, cette construction doit alors également être remplacée par une règle d'aires égales; il faut tracer la droite de pente  $(-1/t)$  qui, en coupant  $(\Gamma)$  (en  $M_1, M_2$  et  $M_3$ ), définit deux onglets d'aires égales; l'intersection de cette droite avec l'axe  $(O\xi)$  donne l'abscisse  $X$  d'un choc; ses deux intersections extrêmes avec  $(\Gamma)$ ,  $M_1$  et  $M_3$ , donnent les vitesses  $u_-$  et  $u_+$  avant et après le choc. Pour  $x$  voisin de  $X$ , la dégénérescence est levée facilement par continuité ( $u(t, x)$  est donné par  $M_1$  pour  $x \lesssim X$ , par  $M_3$  pour  $x \gtrsim X$ ) (voir fig. A).

Notons que la « fonction multivaluée » obtenue dans le cas d'intersection multiple résout le problème d'un fluide de particules qui conserveraient indéfiniment leur vitesse initiale; ce problème n'est équivalent à l'équation de Burgers (inviscide) que jusqu'à  $t_*$ . Dans la limite inviscide, après  $t_*$ , les particules du fluide de Burgers peuvent se rattraper, mais la formation des chocs prohibe les dépassements.

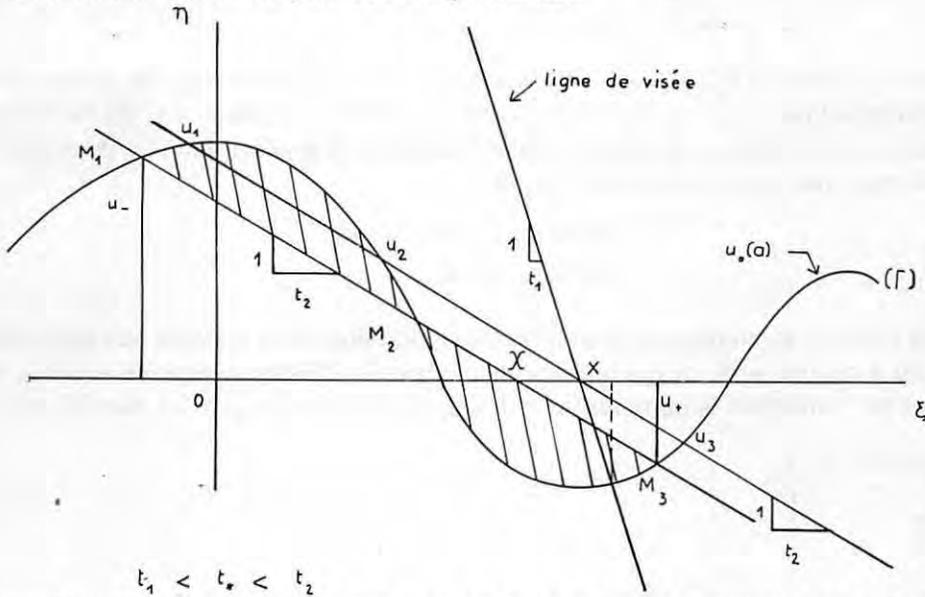


Fig. A. — Intersection d'une ligne de visée avec une surface donnée; la ligne, qui appartient à un plan fixe, passe par  $(x, 0)$  et a pour pente  $(-1/t)$ . A un instant  $t_1 < t_*$ , ce problème est équivalent à l'équation de Burgers inviscide, avec pour donnée initiale  $u_0$  le profil de la section  $(\Gamma)$  de la surface par le plan considéré. Après  $t_*$  il y a intersection multiple ce qui définit la « solution alternée »  $(u_1 - u_2 + u_3)$  (voir fig. 3 et § 2.1 d). La solution exacte présente des chocs, dont la position  $X$  à l'instant  $t_2 > t_*$  est donnée par une règle d'aires égales ( $\backslash\backslash\backslash$ ) découpées sous  $(\Gamma)$  par une droite de pente  $(-1/t_2)$ .

Fig. A. — Intersection of a line of sight with a given surface; the line remains in a given plane and has axis intersection  $x$  and slope  $(-1/t)$ . At a time  $t_1 < t_*$ , this problem is equivalent to the inviscid Burgers' equation, the initial field  $u_0$  being obtained as the intersection  $(\Gamma)$  of the surface and of the plane to which the line of sight belongs. After  $t_*$  a multiple intersection occurs; this defines the « alternating solution »  $(u_1 - u_2 + u_3)$  (see Fig. 3 and § 2.1 d). The true solution exhibits shocks; the position  $X$  of a shock at a time  $t_2 > t_*$  is obtained using an equal areas ( $\backslash\backslash\backslash$ ) rule for the two domains bounded by  $(\Gamma)$  and the line with slope  $(-1/t_2)$ .

Quant à la « solution alternée » [26] :  $u_1 - u_2 + u_3$ , c'est la « solution formelle » que nous discutons au paragraphe 2.1 d dans le cas déterministe, et aux paragraphes 3.3 et 3.4 dans le cas aléatoire; cette construction, qui revient à faire déferler la fonction multivaluée, ne vérifie localement l'équation de Burgers que dans certains intervalles.

## ANNEXE B

### Calcul du comportement asymptotique du spectre pour $t \uparrow T_*$

Dans cette annexe on se propose de calculer le comportement asymptotique du spectre d'énergie  $E(t, k)$  aux grands nombres d'onde, dans la limite  $t \uparrow T_* = 1$ . On introduit pour cela un modèle de la statistique du gradient initial, supposé ici (presque sûrement) borné inférieurement par  $-1$  (voir § 3.3).

On part de la troisième représentation Fourier-Lagrangienne (51), (52), qui dans la phase régulière et pour  $k \neq 0$  s'écrit :

$$(B.1) \quad E(t, k) = \frac{1}{2\pi} t^{-2} k^{-2} \int_{\mathbb{R}} dh \exp(-ikh) \langle \exp[-ikt u_0(h)] \rangle.$$

Dans la limite  $t \uparrow T_*$ ,  $k \rightarrow \infty$ , la contribution principale provient des points où le gradient initial passe par un minimum proche de sa borne inférieure  $-1$ . On modélise la statistique de tels événements en approchant localement le gradient initial  $w(h)$  autour de ce minimum, par une parabole (voir fig. B) :

$$(B.2) \quad \begin{cases} w(h) = -1 + b + c(h-a)^2 \\ b > 0, \quad c > 0, \end{cases}$$

dont la position, le minimum et la courbure sont aléatoires. On s'intéresse aux événements rares où  $b$  est très petit, ce qui légitime une hypothèse d'indépendance de  $a$ ,  $b$  et  $c$ . On effectue par translation la moyenne sur  $a$ . L'introduction de  $n(b)$  et  $\mathcal{S}(c)$ , distributions de

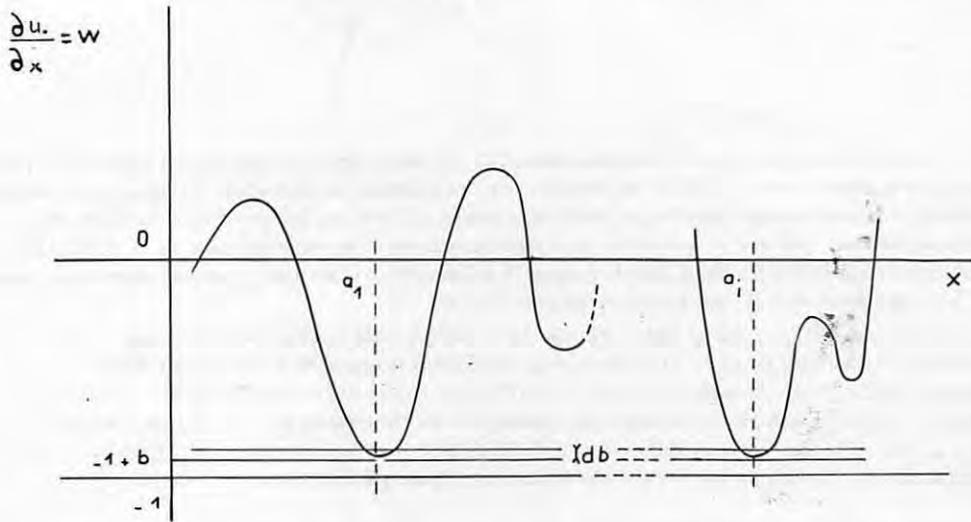


Fig. B. — Modélisation du voisinage des minimums locaux du gradient initial par une parabole aléatoire. Dans le cas de condition initiale aléatoire à gradient uniformément borné inférieurement par  $-M$  (§ 3.3) ( $M=1$  sur la figure), le comportement ultraviolet au voisinage de  $T_* = 1/M$  est régi essentiellement par les événements rares où le minimum de la parabole ( $-1 + b$ ) approche la borne uniforme. Pour un processus homogène, ces événements sont uniformément répartis spatialement; dans le calcul (appendice B), on considère une courbure déterministe; la distribution  $\mathcal{S}(b)$  des minimums locaux est liée asymptotiquement à la distribution du gradient  $P(w)$  (B.4).

Fig. B. — Representation of the local minima of the initial gradient by a random parabola. When the random initial condition has gradients uniformly bounded from below by  $-M$  (§ 3.3) ( $M=1$  on the figure), the ultraviolet behaviour near  $T_* = 1/M$  is essentially governed by the rare events where the minimum of the parabola ( $-1 + b$ ) approaches the uniform bound. For an homogeneous process, such events are spatially uniformly distributed; in the calculation (appendix B), we consider the case of a deterministic curvature; the distribution  $\mathcal{S}(b)$  of the local minima is asymptotically related to the gradient distribution  $P(w)$  (B.4).

probabilité par unité de longueur de  $b$  et  $c$ , permet alors aisément d'obtenir une expression explicite du spectre sous forme d'une intégrale quadruple :

$$(B.3) \quad E(t, k) \underset{\substack{t \uparrow T_* = 1 \\ k \rightarrow \infty}}{\simeq} \frac{1}{2\pi} t^{-2} k^{-2} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} dh da db dc n(b) \mathcal{S}(c) \\ \times \exp \left\{ -ik \left[ (1-t+tb+tca^2)h - acth^2 + \frac{1}{2}cth^3 \right] \right\}.$$

D'autre part, en évaluant de deux manières la fonction caractéristique du gradient, on établit entre  $\hat{P}(\lambda)$ , transformée de Fourier de la distribution du gradient  $P(w)$ , et  $\hat{n}(\lambda)$ , transformée de Fourier de la distribution de ses minima locaux  $n(b)$ , une relation asymptotique ( $|\lambda| \rightarrow \infty$ ) :

$$(B.4) \quad \hat{P}(\lambda) \underset{|\lambda| \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{\pi} \frac{1 - i \operatorname{sgn}(\lambda)}{2} \frac{e^{i\lambda}}{\sqrt{|\lambda|}} \hat{n}(\lambda) \int_{\mathbb{R}_+} dc \frac{1}{\sqrt{c}} \mathcal{S}(c);$$

cette relation est valable pourvu que l'intégrale de  $c^{-1/2} \mathcal{S}(c)$  converge, et que  $n(b)$  soit normalisable. L'intégration sur  $a$  et  $b$ , dans (B.3), donne, dans la limite  $t \uparrow T_* = 1$  :

$$(B.5) \quad E(t, k) \underset{\substack{k \rightarrow \infty \\ t \uparrow T_* = 1}}{\simeq} k^{-2} \int_{\mathbb{R}} dh \exp[-ikh(T_* - t)] \frac{1 - i \operatorname{sgn}(h)}{2^{1/2}} \frac{1}{k^{1/2} |h|^{1/2}} \\ \times \hat{n}(kh) \int_{\mathbb{R}_+} dc c^{-1/2} \mathcal{S}(c) \exp\left(-ikh^3 \frac{c}{12}\right).$$

On continue avec  $c$  déterministe, pour simplifier; posant  $z = hk$ , (B.5) donne alors, avec (B.4) :

$$(B.6) \quad E(t, k) \underset{\substack{t \uparrow T_* \\ k \rightarrow \infty}}{\simeq} k^{-3} \int_{\mathbb{R}} dz \exp[-i(1+T_* - t)z] \hat{P}(z) \exp\left[-\frac{i}{3} \left(\frac{c}{4} k^{-2}\right) z^3\right].$$

L'exponentielle oscillante cubique est transformée de Fourier d'une fonction de Airy. Vu le support de la distribution  $P$ , le théorème de Fourier-convolution, appliqué à (B.6), conduit à :

$$(B.7) \quad E(t, k) \underset{\substack{k \rightarrow \infty \\ t \uparrow T_*}}{\simeq} B k^{-7/3} \int_{-1}^{+\infty} d\mu P(\mu) \operatorname{Ai}[B k^{2/3} (1+T_* - t + \mu)];$$

on a posé  $B = (4/c)^{-1/3}$ . En introduisant  $s = B k^{2/3} (1 + \mu)$ , il vient finalement :

$$(B.8) \quad E(t, k) \underset{\substack{t \uparrow T_* \\ k \rightarrow \infty}}{\simeq} k^{-3} \int_0^{+\infty} ds P(-1 + B^{-1} k^{-2/3} s) \operatorname{Ai}[s + B k^{2/3} (T_* - t)];$$

dans le cas où la distribution  $P(w)$  se comporte en loi de puissance (57) au voisinage de la borne inférieure (fig. 7), on déduit aisément de (B. 8) et du comportement asymptotique de la fonction de Airy [21] la forme self-similaire du spectre :

$$(B.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(t, k) \underset{k \rightarrow \infty}{\propto} k^{-3-2\alpha/3} F_\alpha[k/K_1(t)], \\ \quad \quad \quad \uparrow T_* \\ K_1(t) \underset{t \uparrow T_*}{\propto} (T_* - t)^{-3/2}; \end{array} \right.$$

$F_\alpha$  est une fonction à décroissance rapide. Ce calcul, basé sur une modélisation du voisinage des minima du gradient initial, n'est cohérent qu'autant que la distribution  $n(b)$  des minima est normalisable; *via* la relation asymptotique (B. 4), ceci impose une restriction sur le comportement de  $P$ ; l'exposant  $\alpha$  doit être supérieur à  $-1/2$  pour mener la démonstration ci-dessus. Notons toutefois que le résultat (B. 9) est cohérent avec le comportement de l'ensrophie (58) pour tout  $\alpha > -1$ .

## ANNEXE C

### Probabilité de franchissement par un processus stationnaire

Soit  $m(y)$  une fonction aléatoire; on cherche à déterminer le nombre (aléatoire)  $N(L, \Lambda)$  de franchissements de la valeur  $\Lambda$  par la fonction  $m(y)$  dans l'intervalle  $[0, L]$ . Pour un processus suffisamment régulier, on peut définir le nombre  $N_\uparrow(L, \Lambda)$  de franchissements vers le haut, c'est-à-dire le nombre d'événements où  $m(y) = \Lambda$ , avec une dérivée ( $dm/dy$ ) positive ou nulle; ce nombre est alors donné par la formule de Rice. On étudie sa statistique dans le cas d'un processus  $m(y)$  stationnaire (ou homogène, si  $y$  est l'espace).

#### 1. Formule de Rice [48]

Par définition de  $N_\uparrow(L, \Lambda)$ , on a :

$$(C.1) \quad N_\uparrow(L, \Lambda) = \int_0^L dy \delta[m(y) - \Lambda] \frac{dm}{dy} Y\left(\frac{dm}{dy}\right);$$

on a utilisé  $\delta[F(x)] = (1/|F'(x_*)|) \delta(x - x_*)$ , où  $x_*$  est tel que  $F(x_*) = 0$ ;  $Y$  est la fonction échelon de Heaviside. Introduisant  $P(m, m'; y)$ , distribution de probabilité jointe de  $m$  et de la dérivée  $m' = (dm/dy)$  au point  $y$ , on effectue une moyenne sur (C. 1); on obtient une expression exacte du nombre moyen de franchissements vers le haut (formule de Rice) :

$$(C.2) \quad \langle N_\uparrow(L, \Lambda) \rangle = \int_0^L dy \int_0^\infty dm' m' P(\Lambda, m'; y).$$

## 2. Statistique aux grandes excursions

Pour obtenir des renseignements sur la statistique de  $N_{\uparrow}(L, \Lambda)$ , et non seulement sur la valeur moyenne, on se place dans la situation asymptotique  $\Lambda \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire grand devant la variance de  $m$ , supposée finie (fig. C). On considère un processus  $m(y)$  gaussien, homogène, et vérifiant une propriété de mélange, c'est-à-dire tel que les corrélations à grande distance décroissent rapidement. Alors, quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ , la statistique de  $N_{\uparrow}(L, \Lambda)$  tend vers une loi de Poisson, de paramètre  $\langle N_{\uparrow}(L, \Lambda) \rangle$ .

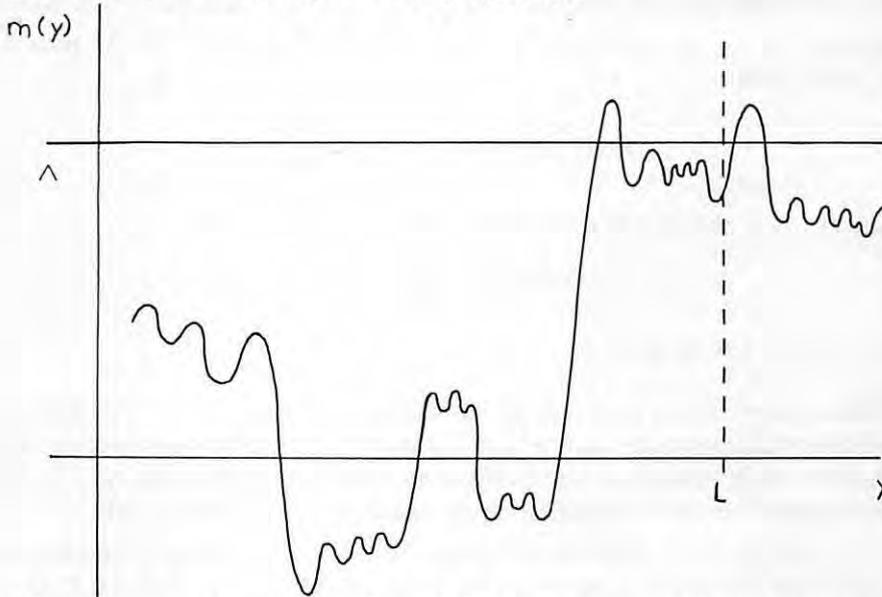


Fig. C. — Franchissement du niveau  $\Lambda$  dans l'intervalle  $[0, L]$  par un processus aléatoire stationnaire. Dans la limite des grandes excursions ( $\Lambda \rightarrow \infty$ ), la statistique des (rares) franchissements vers le haut tend vers une loi de Poisson, à condition en particulier de prendre la limite  $L \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda \rightarrow \infty$ ,  $(\text{Log } L)/\Lambda^2$  fini (voir appendice C, § 4.2 et fig. 11 c).

Fig. C. — Crossing of the level  $\Lambda$  in the interval  $[0, L]$  by a random stationary process. In the limit of large excursions ( $\Lambda \rightarrow \infty$ ), the statistics of the (rare) up-crossings tends to a Poisson law, provided in particular that both limits  $L \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda \rightarrow \infty$ , are taken, with  $(\text{Log } L)/\Lambda^2$  finite (see appendix C, § 4.2 and Fig. 11 c).

Pour que cette affirmation ait un sens, il faut évidemment que cette dernière quantité soit finie dans la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , ce qui ne peut être réalisé qu'en faisant tendre en même temps  $L$  vers l'infini. Avec l'hypothèse d'homogénéité, la probabilité  $P(m, m'; y)$  est en effet indépendante de  $y$ , et la fonction  $m$  et sa dérivée  $m'$  ont une corrélation nulle; la formule de Rice, dans le cas gaussien, donne alors :

$$(C.3) \quad \langle N_{\uparrow}(L, \Lambda) \rangle \underset{\Lambda \rightarrow \infty}{\propto} L \exp\left(-\frac{\Lambda^2}{2\sigma^2}\right),$$

qui reste fini quand  $\Lambda \rightarrow \infty$  seulement si  $L \propto \exp(\Lambda^2/2\sigma^2)$ .

La convergence vers une loi de Poisson résulte du phénomène suivant. Dans la limite  $L \rightarrow \infty$ , on peut découper l'intervalle  $[0, L]$  en un grand nombre  $\mathcal{N}$  de sous-intervalles presque décorrés; le nombre total de franchissements de  $\Lambda$  ( $\Lambda \rightarrow \infty$ ) vers le haut dans l'intervalle  $[0, L]$  est donc la somme de  $\mathcal{N}$  variables aléatoires  $n$  à valeurs entières définies

comme le nombre de franchissements de  $\Lambda$  vers le haut dans un sous-intervalle; les variables  $n$  sont « presque indépendantes »; dans la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , les franchissements sont rares, et donc la valeur moyenne  $\langle n \rangle$  de chacune tend vers zéro, mais de telle manière que, dans la limite  $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ , le produit  $\mathcal{N} \langle n \rangle = \langle N_{\uparrow}(L, \Lambda) \rangle$  reste fini, ce qui est la condition pour la convergence de la somme vers une variable de Poisson. (A noter que ce « théorème central » pour variables entières n'est rigoureux que pour une stricte indépendance des variables aléatoires. D'autre part d'éventuels franchissements vers le haut par bouffées – exclus par l'hypothèse gaussienne – rendraient caduque l'argumentation ci-dessus.)

Finalement la loi de probabilité du processus  $N$ , limite de  $N_{\uparrow}(L, \Lambda)$  pour  $L \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda \rightarrow \infty$ , s'écrit donc :

$$(C.4) \quad \Pr(N=p) = \exp[-\langle N \rangle] \frac{(\langle N \rangle)^p}{p!};$$

en particulier la probabilité de non-franchissement est donnée par :

$$(C.5) \quad \Pr(N=0) = \exp[-\langle N \rangle].$$

#### Notes ajoutées aux épreuves :

(i) Dans certains cas on peut ramener les techniques statistiques de renormalisation à un développement asymptotique dont le petit paramètre n'est pas la non-linéarité; ce type de justification fournit l'exception qui confirme les remarques du paragraphe 5.2. Pour des détails sur groupe de renormalisation versus intermittence voir [59] et [60].

(ii) Les résultats nouveaux présentés ici portent essentiellement sur la limite de viscosité nulle : structure analytique et lois d'échelle du cas déterministe et aléatoire. Pour d'autres développements sur ces questions et d'autres références sur le cas à viscosités positives (questions d'intégrabilité) voir [47], [61], [62].

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BURGERS J. M., *Mathematical Examples Illustrating Relations Occuring in the Theory of Turbulent Fluid Motion* (Verhand. Kon. Nederl. Akad. Wetenschappen, Afd. Natuurkunde, Eerste Sectie, vol. 17, 1939, p. 1-53).
- [2] SU C. H. et GARDNER C. S., *Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries Equation and Burgers Equation* (J. of Math. Phys., vol. 10, 1969, p. 536-539).
- [3] SAFFMAN P. G., *Lectures on Homogeneous Turbulence*, in *Topics in Non-Linear Physics*, N. ZABUSKY, ed., Springer-Verlag, 1968, p. 485-614.
- [4] BURGERS J. M., *Application of a Model System to Illustrate Some Points of the Statistical Theory of Free Turbulence* (Proc. Roy. Neth. Acad. Sc., vol. 43, 1940, p. 2-12).
- [5] BURGERS J. M., *Correlation Problems in a One-Dimensional Model of Turbulence* (Proc. Roy. Neth. Acad. Sc., 1950, p. 247-260, p. 393-406, p. 718-742).
- [6] BURGERS J. M., *The Nonlinear Diffusion Equation*, D. REIDEL, Publ. Co., 1974. Ce livre contient une liste des travaux de J. Burgers en relation avec l'équation (1).
- [7] DORFMAN J. R. et FULLER A. J., *Jan Burgers* (Physics Today, vol. 1, 1982, p. 84-85).
- [8] BURGERS J. M., *Some Memories of Early Work in Fluid Mechanics at the Technical University of Delft* (Ann. Rev. Fluid Mech., vol. 7, 1975, p. 1-11).
- [9] BURGERS J. M., *On the Application of Statistical Mechanics to the Theory of Turbulent Fluid Motion* (Proc. Roy. Neth. Acad. Sc., vol. 32, 1929, p. 643-657), cité dans [11].

- [10] GERMAIN P., *Méthodes Asymptotiques en Mécanique des Fluides*, in *Fluid Dynamics (École d'Été des Houches, 1973)*, R. BALIAN et J.-L. PEUBE, éd., Gordon and Breach Publ., 1977, p. 1-147, en part. p. 112-127).
- [11] ROSE H. A. et SULEM P.-L., *Fully Developed Turbulence and Statistical Mechanics (J. Phys., Paris, vol. 39, 1978)*, p. 441-484.
- [12] MARTIN P. C., SIGGIA E. D. et ROSE H. A., *Statistical Dynamics of Classical Systems (Phys. Rev. A, vol. 8, 1973)*, p. 423-437).
- [13] KRAICHNAN R. H., *The Structure of Isotropic Turbulence at Very High Reynolds Number (J. Fluid Mech., vol. 5, 1959)*, p. 497-543).
- [14] KRAICHNAN R. H., *Invariance Principles and Approximation in Turbulence Dynamics in Dynamics of Fluids and Plasmas*, S. I. PAI, éd., Acad. Press, 1966, p. 239.
- [15] KRAICHNAN R. H., *Convergents to Turbulence Functions (J. Fluid Mech., vol. 41, 1970)*, p. 189-217).
- [16] HOPF E., *The Partial Differential Equation  $u_t + uu_x = u_{xx}$  (Comm. Pure Appl. Mech., vol. 3, 1950)*, p. 201-230).
- [17] COLE J. D., *On a Quasi-Linear Parabolic Equation Occuring in Aerodynamics (Quart. Appl. Math., vol. 9, 1951)*, p. 225-236).
- [18] KIDA S., *Asymptotic Properties of Burgers Turbulence (J. Fluid Mech., vol. 93, 1979)*, p. 337-377).
- [19] FRISCH U. et FOURNIER J.-D., *Quelques Résultats Exacts pour l'Équation de Burgers Aléatoire (J. Phys., Paris, C5, vol. 39, p. 19-20)*.
- [20] FRISCH U., non publié (1975).
- [21] ABRAMOWITZ M. et STEGUN I., *Handbook of Mathematical Functions*, Nat. Bureau of Standards, 1968, p. 446-452.
- [22] SULEM C., SULEM P.-L. et FRISCH H., *Tracing Complex Singularities with Spectral Methods (J. Comput. Phys., vol. 50, 1983)*, p. 138-161). Le comportement ultraviolet de l'équation de Burgers inviscide déterministe y est vérifié avec précision, à titre de test de la méthode numérique.
- [23] Voir par exemple CARRIER G. F., KROOK M. et PEARSON C. E., *Functions of a Complex Variable*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [24] FRISCH U., *Fully Developed Turbulence, Singularities and Intermittency*, in *Chaotic Behavior in Deterministic Systems [École d'Été des Houches, 1981]*, G. IOOSS, éd., North-Holland (à paraître)].
- [25] KAHNG W. H., *Spectral Analysis of Inviscid Burgers' Model of Turbulence Using Cameron-Martin-Wiener Exact Expansion (Phys. Fluids, vol. 13, 1970)*, p. 1970-1977).
- [26] MEECHAM W. C. et THEBAUD L. R., *The Stochastic, One Dimensional Inertial Equation (Inviscid Burgers' Model) and Surface Intersections*, prépublication University of Californie, 1981.
- [27] MEECHAM W. C. et SIEGEL A., *Wiener-Hermite Expansion in Model Turbulence at Large Reynolds Numbers (Phys. Fluids, vol. 7, 1964)*, p. 1178-1190).
- [28] ORSZAG S. A. et BISSONNETTE L. R., *Dynamical Properties of Truncated Wiener-Hermite Expansions (Phys. Fluids, vol. 10, 1967)*, p. 2603-2613).
- [29] JENG D. T., FOERSTER R., HAALAND S. et MEECHAM W. C., *Statistical Initial-Value Problem for Burgers' Model Equation of Turbulence (Phys. Fluids, vol. 9, 1966)*, p. 2114-2120).
- [30] MEECHAM W. C. et SU M.-Y., *Prediction of Equilibrium Properties for Nearly Normal Model Turbulence (Phys. Fluids, vol. 12, 1969)*, p. 1582-1591).
- [31] TANAKA H., *0-5th Cumulant Approximation of Inviscid Burgers Turbulence (J. Meteor. Soc., Japan, vol. 47, 1969)*, p. 373-383). Cité dans Orszag, S.A., *Lectures on the Statistical Theory of Turbulence*, in *Fluid Dynamics, 1977* (comme réf. [10]).
- [32] KRAICHNAN R. H., *Lagrangian-History Statistical Theory for Burgers' Equation (Phys. Fluids, vol. 11, 1968)*, p. 265-277).
- [33] BRISAUD A., FRISCH U., LÉORAT J., LESIEUR M., MAZURE A., POUQUET A., SADOURNY R. et SULEM P.-L., *Catastrophe Énergétique et Nature de la Turbulence (Ann. Geophys., vol. 29, 1973)*, p. 539-546).
- [34] BARDOS C., PENEL P., FRISCH U. et SULEM P.-L., *Modified Dissipativity for a Non-Linear Evolution Equation Arising in Turbulence (Archiv. Rat. Mech. Anal., vol. 71, 1979)*, p. 237-256).
- [35] ARONSON D. G., CAFFARELLI L. A. et KAMIN S., *How an Initially Stationary Interface Begins to Move in Porous Medium Flow*, prépublication Dept. of Mathematics Tel-Aviv 1982.
- [36] FORSTER D., NELSON D. R. et STEPHEN M. J., *Large Distance and Long Time Properties of a Randomly Stirred Fluid (Phys. Rev. A, vol. 16, 1977)*, p. 732-749).

- [37] KURAMOTO Y., *Diffusion-Induced Chaos in Reaction Systems* (*Prog. Theor. Phys. Suppl.*, vol. 64, 1978, p. 346-367).
- [38] MANNEVILLE P., *Statistical Properties of Chaotic Solutions of a One-Dimensional Model for Phase Turbulence* (*Phys. Letters A*, vol. 84, 1981, p. 129-132).
- [39] DESNYANSKI V. N. et NOVIKOV E. A. (*Prinkl. Mat. Mekh.*, vol. 38, 1974, p. 507).
- [40] BELL T. L. et NELKIN M., *Nonlinear Cascade Models for Fully Developed Turbulence* (*Phys. Fluids*, vol. 20, 1977, p. 345-350).
- [41] BELL T. L. et NELKIN M., *Time-Dependent Scaling Relations and a Cascade Model of Turbulence* (*J. Fluid Mech.*, vol. 88, 1978, p. 369-391).
- [42] FOURNIER J.-D., FRISCH U. et ROSE H. A., *Infinite Dimensional Turbulence* (*J. Phys. A*, vol. 11, 1978, p. 187-198).
- [43] SULEM P.-L., FOURNIER J.-D. et POUQUET A., *Fully Developed Turbulence and Renormalization Group*, in *Dynamical Critical Phenomena*, (C. P. ENZ, éd., *Lecture Notes in Physics* 104, Springer-Verlag, 1979, p. 320-335).
- [44] MONIN A. et YAGLOM A. M., *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, vol. 2, édition anglaise, J. L. LUMLEY, éd., M.I.T. Press, 1975.
- [45] ADLER R. J. et FIRMAN D., *A Non-Gaussian Model for Random Surfaces* (*Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, vol. 303, 1981, p. 433-462).
- [46] TATSUMI T. et KIDA S., *Statistical Mechanics of the Burgers Model of Turbulence* (*J. Fluid Mech.*, vol. 55, 1972, p. 659-675).
- [47] FRISCH U. et MORF R., *Intermittency in Nonlinear Dynamics and Singularities at Complex Times* (*Phys. Rev. A*, vol. 23, 1981, p. 2673-2705).
- [48] RICE S. O., *Mathematical Analysis of Random Noise*, Bell System Tech. J., 1944, 1945, reproduit dans *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, N. WAX, éd., Dover Pub., 1954, p. 133-294.
- [49] McLAUGHLIN D., PAPANICOLAOU G. et PIRONNEAU O., *Convection of Microstructure*, prépublication Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1982.
- [50] YAKHOT V., *Statistical Properties of a One-Dimensional Phase Turbulence in the Inertial Range* (*Phys. Letters A*, vol. 86, 1981, p. 326); YAKHOT V., *Large Scale Properties of Unstable Systems Governed by the Kuramoto-Sivashinsky Equation* [*Phys. Rev. A*, vol. 24, 1981, p. 642-644 (Rapid Commun.)]; THUAL O., 1982, communication privée; BRACHET M.-E., 1982, communication privée.
- [51] KOLMOGOROV A. N., *The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Number* (*C.R. Acad. Sc.*, U.R.S.S., vol. 30, 1941, p. 301).
- [52] FRISCH U., SULEM P.-L. et NELKIN M., *A Simple Dynamical Model for Intermittent Fully-Developed Turbulence* (*J. Fluid Mech.*, vol. 87, 1978, p. 719-736).
- [53] BRISSAUD A. et FRISCH U., *Solving Linear Stochastic Differential Equations* (*J. Math. Phys.*, vol. 15, 1974, p. 524-534).
- [54] KRAICHNAN R. H., *Remarks on Turbulence Theory* (*Advances in Math.*, vol. 16, 1975, p. 305-331).
- [55] BRACHET M.-E., *Intégration Numérique des Equations de Navier-Stokes en Régime de Turbulence Développée* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, vol. 294, 1982, p. 537-540).
- [56] BRACHET M.-E., MEIRON D. I., ORSZAG S. A., NICKEL B., MORF R. et FRISCH U., *Small-Scale Structure of the Taylor-Green Vortex* (*J. Fluid Mech.*, vol. 130, 1983, p. 411-452).
- [57] CHORIN A., *Estimates of Intermittency, Spectra and Blow-Up in Developed Turbulence* (*Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 34, 1981, p. 853-866) et *The Evolution of a Turbulent Vortex* (*Comm. Math. Phys.*, vol. 83, 1982, p. 517-535).
- [58] VON NEUMANN J., *Recent Theories of Turbulence*, 1949, in *Collected Works*, vol. 6, 1949-1963, p. 437-472.
- [59] KRAICHNAN R. H., *Hydrodynamic Turbulence and the Renormalization Group* (*Phys. Rev. A*, vol. 25, 1982, p. 3281-3289).
- [60] FOURNIER J.-D. et FRISCH U., *Remarks on the Renormalization Group in Statistical Fluid Dynamics* (*Phys. Rev. A*, vol. 28, 1983, p. 1000-1003).
- [61] FOURNIER J.-D., *Scaling Laws in Turbulence*, in *Regular and Chaotic Motions in Dynamical Systems* [*École d'Été*, Erice, 1983, G. VELO et A. WIGHTMAN éd., Nato A.S.I. Séries B (à paraître)].
- [62] FRISCH U., *The Analytic Structure of Turbulent Flows*, in *Chaos and Statistical Mechanics* [*Institut d'Été*, Kyoto, 1983, Y. KURAMOTO éd., *Lecture Notes in Physics*, Springer-Verlag (à paraître)].

(Manuscrit reçu le 9 juillet 1982,

accepté le 26 janvier 1983).